



**Lycée Jean-Baptiste de Baudre**  
Agen

# Parcours de consolidation en mathématiques

*Six semaines pour bien démarrer en BTS*

**Cahier d'approfondissement**

*Spécialité CPI — Conception des Produits Industriels*

**Version étudiant**  
(énoncés et espaces de réponse)

De la rentrée aux vacances de la Toussaint

# Sommaire

|                                                          |           |
|----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Semaine 1 : Calcul, formules et unités</b>            | <b>1</b>  |
| Exercices classiques (suite) . . . . .                   | 1         |
| Activités d'application . . . . .                        | 4         |
| <b>Semaine 2 : Proportionnalité et géométrie de base</b> | <b>5</b>  |
| Exercices classiques (suite) . . . . .                   | 5         |
| Activités d'application . . . . .                        | 9         |
| <b>Semaine 3 : Trigonométrie</b>                         | <b>11</b> |
| Exercices classiques (suite) . . . . .                   | 11        |
| Activités d'application . . . . .                        | 16        |
| <b>Semaine 4 : Vecteurs</b>                              | <b>17</b> |
| Exercices classiques (suite) . . . . .                   | 17        |
| <b>Semaine 5 : Fonctions et lecture graphique</b>        | <b>23</b> |
| Exercices classiques (suite) . . . . .                   | 23        |
| <b>Semaine 6 : Dérivation</b>                            | <b>29</b> |
| Exercices classiques (suite) . . . . .                   | 29        |

# Semaine 1 : Calcul, formules et unités

Ce chapitre prolonge le cahier principal. Il se compose de deux parties : (a) des exercices classiques supplémentaires (tronc commun aux quatre BTS), (b) des activités d'application en contexte métier plus complètes, qui enchaînent davantage d'étapes.

## Exercices classiques (suite)

Ces exercices prolongent les deux exercices du cahier de base. Ils enchaînent plusieurs notions et demandent une étape de raisonnement supplémentaire. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. Les quatre derniers, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

### Exercice 1

Simplifier chaque expression, puis donner le résultat en notation scientifique.

$$\text{a) } \frac{10^6 \times 10^{-3}}{10^{-2}} \quad \text{b) } (3 \times 10^4) \times (2 \times 10^{-6}) \quad \text{c) } \frac{(4 \times 10^{-3})^2}{8 \times 10^{-4}}$$

Réponse :

### Exercice 2

Une clé USB a une capacité annoncée de 64 Go.

1. Convertir cette capacité en Mo, puis en ko (rappel : 1 Go =  $10^3$  Mo =  $10^6$  ko).
2. Un fichier photo pèse 8 Mo. Combien de photos la clé peut-elle contenir ?
3. Un fichier vidéo pèse 1,2 Go. Combien de vidéos la clé peut-elle contenir ?

Réponse :

### Exercice 3

La loi d'Ohm relie tension  $U$ , résistance  $R$  et courant  $I$  par  $U = R \times I$ .

1. Isoler  $R$  dans cette relation.

- On mesure  $U = 12 \text{ V}$  et  $I = 250 \text{ mA}$ . Convertir  $I$  en A, puis calculer  $R$  en  $\Omega$ .
- Exprimer  $R$  en  $\text{k}\Omega$ .

Réponse :

#### Exercice 4

Le volume d'un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  est donné par  $V = \pi r^2 h$ .

- Calculer  $V$  pour  $r = 3 \text{ cm}$  et  $h = 10 \text{ cm}$  (valeur exacte en  $\pi$ , puis approchée au dixième).
- Convertir  $V$  en  $\text{dm}^3$ , puis en litres (rappel :  $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$ ).
- Un autre cylindre a le même rayon  $r = 3 \text{ cm}$  et un volume  $V' = 180 \pi \text{ cm}^3$ . Isoler  $h'$  dans la formule et calculer sa valeur.

Réponse :

#### Exercice 5

La vitesse de la lumière vaut  $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ . La distance Terre–Lune vaut  $d \approx 384\,000 \text{ km}$ .

- Exprimer  $d$  en mètres, en notation scientifique.
- Le temps mis par la lumière pour parcourir la distance Terre–Lune est  $t = \frac{d}{c}$ . Calculer  $t$  en secondes.
- Exprimer ce temps en millisecondes.

Réponse :

#### Exercice 6

L'énergie cinétique d'un objet en mouvement est donnée par  $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ .

- Isoler  $m$  dans la formule.
- Isoler  $v$  dans la formule (on suppose  $v > 0$ ).
- Une voiture de masse  $m = 1\,200 \text{ kg}$  a une énergie cinétique  $E_c = 150\,000 \text{ J}$ . Calculer sa vitesse  $v$  en  $\text{m/s}$ .

Réponse :

Pour aller plus loin

### Exercice 7

Calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{6} - \frac{1}{2}}$$

Réponse :

### Exercice 8

Une fibre optique offre un débit de 10 Gbit/s. On veut transférer un fichier de 2 Go (on prend 1 o = 8 bit).

1. Convertir le débit en bit/s, en notation scientifique.
2. Convertir la taille du fichier en bits.
3. Le temps de transfert vaut  $t = \frac{\text{taille}}{\text{débit}}$ . Calculer  $t$  en secondes.

Réponse :

### Exercice 9

Un disque a pour aire  $S = 314 \text{ mm}^2$ . On rappelle  $S = \pi r^2$ .

1. Isoler  $r$  dans la formule.
2. Calculer  $r$  en mm (arrondir au dixième).
3. Convertir  $r$  en cm.

Réponse :

### Exercice 10

Le rayon d'un atome d'hydrogène vaut environ  $r_{\text{atome}} = 5,3 \times 10^{-11}$  m. Le rayon de la Terre vaut environ  $r_{\text{Terre}} = 6,4 \times 10^6$  m.

1. Combien de fois le rayon de la Terre est-il plus grand que celui d'un atome d'hydrogène ? Donner le résultat en notation scientifique.
2. Le rayon d'une cellule biologique moyenne vaut  $r_{\text{cellule}} \approx 10^{-5}$  m. Est-ce plus proche de l'atome ou de la Terre, en ordre de grandeur ?

Réponse :

## Activités d'application

### Activité 1 • Aire d'une section carrée

MÉCANIQUE

**Outil réinvesti :** calcul numérique, conversion  $\text{mm}^2 \rightarrow \text{m}^2$     **Lien référentiel :** lecture de plan, sections de pièces

1. Donner la formule de l'aire  $S$  d'un carré de côté  $a$ .
2. Une pièce a une section carrée de côté  $a = 20$  mm. Calculer son aire  $S$  en  $\text{mm}^2$ .
3. Exprimer 1 mm en mètres sous la forme d'une puissance de 10, puis en déduire à quoi est égal  $1 \text{ mm}^2$  en  $\text{m}^2$ .
4. En déduire l'aire  $S$  de la pièce, exprimée en  $\text{m}^2$ .

Réponse :

# Semaine 2 : Proportionnalité et géométrie de base

Ce chapitre prolonge le cahier principal. Il se compose de deux parties : (a) des exercices classiques supplémentaires (tronc commun aux quatre BTS), (b) des activités d'application en contexte métier plus complètes, qui enchaînent davantage d'étapes.

## Exercices classiques (suite)

Ces exercices prolongent les deux exercices du cahier de base. Ils enchaînent plusieurs notions et demandent une étape de raisonnement supplémentaire. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. Les quatre derniers, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

### Exercice 1

Une machine d'usinage produit 45 pièces en 1 h 15 min, à cadence constante.

1. Exprimer cette durée en heures, puis calculer la cadence de la machine, en pièces par heure.
2. En déduire la durée nécessaire pour produire 300 pièces. Donner le résultat en heures et minutes.
3. Après un nouveau réglage, la cadence augmente de 25 %. Calculer la nouvelle cadence, puis la nouvelle durée pour 300 pièces.
4. De combien de minutes le réglage a-t-il fait gagner sur cette série de 300 pièces ?

Réponse :

### Exercice 2

Un atelier achète une matière première 240 € la tonne. Le fournisseur annonce une hausse de 8 %, puis, à la commande, consent une remise de 5 % sur le prix déjà augmenté.

1. Calculer le prix après la hausse, puis le prix après la remise.
2. Calculer le coefficient multiplicateur global de ces deux évolutions successives. En déduire l'évolution globale, en pourcentage.
3. Un second fournisseur affiche 204 € la tonne après une remise de 15 %. Quel était son prix avant remise ?
4. Lequel des deux fournisseurs est le moins cher au final ?

Réponse :

### Exercice 3

Sur un dessin de définition, une plaque rectangulaire est représentée avec une longueur de 84 mm et une largeur de 36 mm. La longueur réelle de la plaque est de 2,10 m.

1. Exprimer la longueur réelle en millimètres, puis déterminer l'échelle du dessin sous la forme  $1 : n$ .
2. En déduire la largeur réelle de la plaque, en mètres.
3. Calculer l'aire réelle de la plaque, en  $\text{m}^2$ , et son aire sur le dessin, en  $\text{cm}^2$ .
4. Calculer le rapport entre l'aire réelle et l'aire sur le dessin (les deux étant exprimées dans la même unité). Que remarque-t-on par rapport à  $n$  ?

Réponse :

### Exercice 4

Un réservoir doit contenir 100 L, soit  $100\,000\text{ cm}^3$ . Deux formes sont envisagées.

1. **Version parallélépipédique** : la base mesure  $80\text{ cm} \times 50\text{ cm}$ . Isoler  $h$  dans la formule  $V = L\ell h$ , puis calculer la hauteur nécessaire.
2. **Version cylindrique** : la hauteur imposée est  $h = 50\text{ cm}$ . Isoler  $r$  dans la formule  $V = \pi r^2 h$ , puis calculer le rayon nécessaire (arrondir au dixième).
3. Calculer l'aire au sol occupée par chacune des deux versions, en  $\text{cm}^2$ .
4. Quelle version encombre le moins au sol ?

Réponse :

**Exercice 5**

Un atelier facture ses travaux de découpe selon la règle suivante : 12 € de mise en route, plus 0,25 € par pièce découpée. On note  $n$  le nombre de pièces et  $P$  le prix à payer, en euros.

1. Calculer le prix à payer pour  $n = 20$  pièces, puis pour  $n = 60$  pièces.
2. Le prix  $P$  est-il proportionnel au nombre  $n$  de pièces ? Justifier en comparant les rapports  $\frac{P}{n}$  obtenus à la question précédente.
3. Combien de pièces peut-on faire découper avec un budget de 30 € ?
4. Un atelier concurrent facture 0,40 € par pièce, sans mise en route. À partir de quel nombre de pièces le premier atelier devient-il le moins cher ?

Réponse :

**Exercice 6**

Une bille d'acier a un rayon  $r = 6$  mm. On prendra pour l'acier une masse volumique  $\rho = 7,85$  g/cm<sup>3</sup>.

1. Calculer le volume de la bille en mm<sup>3</sup> (valeur exacte, puis approchée au dixième).
2. Convertir ce volume en cm<sup>3</sup>, puis calculer la masse de la bille en grammes (arrondir au centième).
3. Une seconde bille a un rayon deux fois plus grand. Sans refaire tout le calcul, dire par combien sa masse est multipliée, et donner cette masse.
4. Combien de billes de rayon 6 mm faut-il pour atteindre une masse totale de 1 kg ?

Réponse :

\_\_\_\_\_ Pour aller plus loin \_\_\_\_\_

**Exercice 7**

Une machine est affichée 1 434 € toutes taxes comprises (TTC). Le taux de TVA appliqué est de 20 % : le prix TTC s'obtient en multipliant le prix hors taxes (HT) par 1,20.

1. Calculer le prix HT de la machine.
2. En déduire le montant de la TVA.

3. Le vendeur consent une remise et ramène le prix TTC à 1 290,60 €. Calculer le pourcentage de cette remise.
4. Quel est le nouveau prix HT après remise ?

Réponse :

### Exercice 8

Le plan d'implantation d'un atelier est tracé à l'échelle 1 : 250.

1. Un mur mesure réellement 17,5 m. Calculer sa longueur sur le plan, en centimètres.
2. Une zone de stockage est représentée par un rectangle de 6 cm  $\times$  4,5 cm sur le plan. Calculer ses dimensions réelles, en mètres.
3. En déduire l'aire réelle de cette zone, en m<sup>2</sup>.
4. Retrouver ce dernier résultat en partant de l'aire de la zone sur le plan et en utilisant le rapport  $n^2$ .

Réponse :

### Exercice 9

Une rondelle plate a la forme d'une couronne : c'est un disque de rayon extérieur  $R$  dans lequel on a percé un disque de rayon intérieur  $r$ .

1. Exprimer l'aire  $S$  de la couronne en fonction de  $R$  et  $r$ , puis la factoriser.
2. Calculer  $S$  pour  $R = 25$  mm et  $r = 12$  mm (valeur exacte, puis approchée au dixième).
3. Quel pourcentage du disque plein le perçage a-t-il enlevé ? Arrondir au dixième.
4. Une autre rondelle de même rayon extérieur  $R = 25$  mm a une aire de couronne  $S = 400\pi$  mm<sup>2</sup>. Isoler  $r$ , puis calculer sa valeur.

Réponse :

### Exercice 10

Un laiton est composé de 60 % de cuivre et 40 % de zinc, en masse. On dispose d'un lingot de 25 kg de ce laiton.

1. Calculer la masse de cuivre et la masse de zinc contenues dans le lingot.
2. On ajoute 5 kg de zinc pur au lingot. Calculer la nouvelle masse totale, puis le nouveau pourcentage de zinc.
3. On repart du lingot initial de 25 kg. Quelle masse  $x$  de zinc pur faut-il ajouter pour que le zinc représente 60 % de l'alliage obtenu ?

Réponse :

## Activités d'application

### Activité 1 • Volume et masse d'une pièce cylindrique

MÉCANIQUE

**Outil réinvesti :** volume d'un cylindre, conversion  $\text{mm}^3 \rightarrow \text{cm}^3$ , masse volumique **Lien référentiel**  
: géométrie d'une pièce, devis matière

On rappelle que le volume d'un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  vaut  $V = \pi r^2 h$ . La masse d'une pièce se calcule à partir de la masse volumique du matériau :  $m = \rho \times V$ . Pour l'acier, on prendra  $\rho = 7,85 \text{ g/cm}^3$ .

Une pièce cylindrique en acier a un rayon  $r = 10 \text{ mm}$  et une hauteur  $h = 100 \text{ mm}$ .

1. Calculer le volume  $V$  de la pièce, en  $\text{mm}^3$  (on donnera la valeur approchée à l'unité).
2. Exprimer 1 mm en centimètres sous la forme d'une puissance de 10, puis en déduire à quoi est égal 1  $\text{mm}^3$  en  $\text{cm}^3$ .
3. En déduire le volume  $V$  de la pièce, exprimé en  $\text{cm}^3$ .
4. Calculer la masse  $m$  de la pièce, en grammes.

Réponse :

**Activité 2 • Loi d'Ohm dans un circuit**

PHYSIQUE APPLIQUÉE

**Outil réinvesti :** proportionnalité, application de formule, isoler une grandeur **Lien référentiel :** S11 — Électricité (tension, intensité)

Dans un conducteur ohmique, la tension  $U$  à ses bornes est proportionnelle à l'intensité  $I$  qui le traverse : c'est la loi d'Ohm, où  $R$  est la résistance (en ohms,  $\Omega$ ).

1. Écrire la loi d'Ohm reliant  $U$ ,  $R$  et  $I$ .
2. Pour une résistance  $R = 220 \Omega$  traversée par un courant  $I = 0,5 \text{ A}$ , calculer la tension  $U$ .
3. On applique une tension  $U = 24 \text{ V}$  aux bornes d'une résistance  $R = 12 \Omega$ . Calculer l'intensité  $I$ . (isoler  $I$ )

Réponse :

# Semaine 3 : Trigonométrie

Ce chapitre prolonge le cahier principal. Il se compose de deux parties : (a) des exercices classiques supplémentaires (tronc commun aux quatre BTS), (b) des activités d'application en contexte métier plus complètes, qui enchaînent davantage d'étapes.

## Exercices classiques (suite)

Ces exercices prolongent les deux exercices du cahier de base. Ils enchaînent plusieurs notions et demandent une étape de raisonnement supplémentaire. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. Les quatre derniers, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

### Exercice 1

Une rampe d'accès rectiligne mesure 6 m de long et permet de franchir une dénivellation de 0,50 m.

1. Calculer l'angle que fait la rampe avec l'horizontale (arrondir au dixième de degré).
2. Calculer la longueur horizontale couverte par la rampe (arrondir au centimètre).
3. La pente, en pourcentage, est le rapport de la hauteur sur la longueur horizontale. La calculer. La réglementation impose une pente inférieure à 5 % : la rampe est-elle conforme ?
4. Pour la même dénivellation de 0,50 m, quelle longueur horizontale faudrait-il pour obtenir une pente de 5 % ?

Réponse :

### Exercice 2

Un bâtiment de 9 m de large est couvert par une toiture à deux pans symétriques. Chaque pan fait un angle de  $35^\circ$  avec l'horizontale.

1. Justifier que la demi-largeur du bâtiment vaut 4,50 m, puis calculer la hauteur du faîtage au-dessus du niveau des murs (arrondir au centimètre).
2. Calculer la longueur d'un pan de toiture, mesurée du mur au faîtage (arrondir au centimètre).
3. Vérifier ce dernier résultat par le théorème de Pythagore.

4. Le bâtiment mesure 12 m de long. Calculer l'aire totale de la toiture, en  $\text{m}^2$ .

Réponse :

### Exercice 3

Une force de 250 N est appliquée sur une pièce, selon une direction faisant un angle de  $30^\circ$  avec l'horizontale.

1. Calculer la composante horizontale de cette force (arrondir au dixième de newton).
2. Calculer sa composante verticale.
3. Vérifier que ces deux composantes redonnent bien une force de 250 N.
4. Une autre force a une composante horizontale de 200 N et une composante verticale de 150 N. Calculer son intensité et l'angle qu'elle fait avec l'horizontale.

Réponse :

### Exercice 4

Un triangle rectangle a pour côtés de l'angle droit 40 mm et 75 mm. On note  $\alpha$  l'angle dont le côté opposé mesure 40 mm.

1. Calculer la longueur de l'hypoténuse.
2. Calculer l'angle  $\alpha$  (arrondir au dixième de degré).
3. En déduire le second angle aigu  $\beta$ , sans nouvelle trigonométrie inverse.
4. Calculer  $\sin \alpha$  et  $\cos \alpha$  à  $10^{-4}$  près, puis vérifier numériquement que  $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$ .

Réponse :

### Exercice 5

Un triangle a pour côtés 1,  $\sqrt{3}$  et 2 (en centimètres).

1. Identifier l'hypoténuse, puis vérifier par le calcul que ce triangle est bien rectangle.
2. Déterminer les deux angles aigus en utilisant le tableau des valeurs particulières.
3. Vérifier la cohérence du résultat de deux façons : par la somme des angles, et en calculant  $\tan$  du plus grand angle aigu.
4. On fabrique une pièce de même forme, mais dont l'hypoténuse mesure 10 cm. Calculer ses deux autres côtés, puis dire ce que deviennent les angles.

Réponse :

### Exercice 6

Cet exercice porte sur l'usage de la calculatrice et le contrôle des résultats.

1. En mode degré, calculer  $\sin 30^\circ$ ,  $\cos 60^\circ$ ,  $\tan 45^\circ$  et  $\sin 90^\circ$ .
2. Que renvoie la calculatrice pour  $\sin 90$  si elle est restée en mode radian ? Comment ce seul résultat permet-il de détecter l'erreur de mode ?
3. Calculer  $\tan^{-1}(1)$  dans chacun des deux modes, et commenter les deux résultats obtenus.
4. Un étudiant annonce avoir trouvé  $\sin \alpha = 1,2$  pour un angle aigu d'un triangle rectangle. Expliquer, sans calculatrice, pourquoi ce résultat est nécessairement faux.

Réponse :

Pour aller plus loin

### Exercice 7

On considère un triangle rectangle d'hypoténuse  $c$ , dont le côté opposé à l'angle aigu  $\alpha$  mesure  $a$  et le côté adjacent  $b$ .

1. Exprimer  $\sin \alpha$  et  $\cos \alpha$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c$ .
2. Calculer  $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2$  et le mettre sous forme d'une seule fraction.
3. Conclure, en utilisant le théorème de Pythagore, que cette somme vaut toujours 1.
4. Application : on sait que  $\sin \alpha = 0,28$ . Calculer  $\cos \alpha$  sans passer par l'angle, puis en déduire  $\tan \alpha$  à  $10^{-2}$  près.

Réponse :

### Exercice 8

Une échelle de 5 m est appuyée contre un mur vertical et fait un angle de  $70^\circ$  avec le sol.

1. Calculer la hauteur atteinte sur le mur (arrondir au centimètre).
2. Calculer la distance entre le pied de l'échelle et le mur.
3. Une règle de sécurité courante veut que le pied soit écarté du mur d'un quart de la longueur de l'échelle. Calculer cette distance, puis l'angle correspondant (arrondir au dixième de degré).
4. Avec ce nouveau réglage, quelle hauteur atteint-on sur le mur ? L'échelle est-elle plus ou moins redressée qu'au départ ?

Réponse :

### Exercice 9

Pour mesurer la hauteur d'un pylône, un technicien se place à 40 m de son pied et vise le sommet. L'appareil de visée, placé à 1,60 m du sol, indique un angle de  $32^\circ$  au-dessus de l'horizontale.

1. Calculer la hauteur du sommet au-dessus du niveau de l'appareil de visée (arrondir au décimètre).
2. En déduire la hauteur totale du pylône.
3. De quelle distance le technicien devrait-il se placer pour viser le sommet sous un angle de  $45^\circ$  ?
4. Reprendre la question 1 avec un angle de  $33^\circ$  au lieu de  $32^\circ$ . Que peut-on en conclure sur la précision exigée pour la visée ?

Réponse :

### Exercice 10

La section d'une glissière a la forme d'un trapèze rectangle : la grande base mesure 80 mm, la petite base 50 mm et la hauteur 35 mm. L'un des côtés est perpendiculaire aux deux bases, l'autre est oblique.

1. Calculer le décalage horizontal entre les extrémités des deux bases, du côté oblique.
2. En déduire la longueur du côté oblique (arrondir au dixième de millimètre).
3. Calculer l'angle que fait le côté oblique avec la grande base (arrondir au dixième de degré).
4. Calculer l'aire de la section, en  $\text{mm}^2$  puis en  $\text{cm}^2$  (rappel : aire d'un trapèze =  $\frac{\text{grande base} + \text{petite base}}{2} \times \text{hauteur}$ ).

Réponse :

### Activités d'application

#### Activité 1 • Projeter une force sur deux axes

MÉCANIQUE

**Outil réinvesti :** cosinus, sinus, projection    **Lien référentiel :** statique, modélisation des actions mécaniques (S3.2.4)

Pour écrire l'équilibre d'une pièce, on remplace une force inclinée par ses deux composantes. On donne : la composante horizontale est  $F_x = F \cos \alpha$  et la composante verticale  $F_y = F \sin \alpha$ . Ici  $F = 200 \text{ N}$  et  $\alpha = 30^\circ$ .

1. Calculer la composante horizontale  $F_x$ .
2. Calculer la composante verticale  $F_y$ .
3. Vérifier que  $\sqrt{F_x^2 + F_y^2}$  redonne bien  $F$ .

Réponse :

# Semaine 4 : Vecteurs

Ce chapitre prolonge le cahier principal. Il se compose de deux parties : (a) des exercices classiques supplémentaires (tronc commun aux quatre BTS), (b) des activités d'application en contexte métier plus complètes, qui enchaînent davantage d'étapes.

## Exercices classiques (suite)

Ces exercices prolongent les deux exercices du cahier de base. Ils enchaînent plusieurs notions et demandent une étape de raisonnement supplémentaire. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. Les quatre derniers, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

### Exercice 1

Un câble tire une charge avec une force de 400 N, selon une direction faisant un angle de  $25^\circ$  au-dessus de l'horizontale.

1. Calculer les composantes horizontale et verticale de cette force (arrondir au dixième).
2. Vérifier, à partir de ces composantes, que la norme retrouvée vaut bien 400 N.
3. Retrouver l'angle de  $25^\circ$  à partir des composantes calculées.
4. On souhaite que la composante verticale atteigne 200 N, sans changer l'intensité de 400 N. Quel angle faut-il donner au câble ?

Réponse :

### Exercice 2

Deux forces s'appliquent en un même point d'une structure :  $\vec{F}_1 = (60; 0)$  et  $\vec{F}_2 = (0; 80)$ , en newtons.

1. Calculer les composantes de la résultante  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , son intensité et son angle avec l'horizontale.
2. Un système est en équilibre lorsque la somme de toutes les forces est le vecteur nul. Déterminer les composantes de la force  $\vec{F}_3$  qu'il faut ajouter pour équilibrer le point.
3. Calculer l'intensité de  $\vec{F}_3$  et préciser sa direction par rapport à  $\vec{R}$ .
4. Vérifier par le calcul que  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$  est bien le vecteur nul.

Réponse :

### Exercice 3

Un drone de surveillance avance à 15 km/h vers le nord. Un vent latéral le pousse vers l'est à 6 km/h. On repère l'est par l'axe horizontal et le nord par l'axe vertical.

1. Écrire les composantes du vecteur vitesse propre du drone et du vecteur vitesse du vent, puis celles de la vitesse réelle.
2. Calculer la vitesse réelle du drone, en km/h (arrondir au centième).
3. Calculer l'angle de dérive, c'est-à-dire l'angle entre la trajectoire réelle et la direction du nord (arrondir au dixième de degré).
4. Au bout de 2 heures de vol, de combien de kilomètres le drone s'est-il écarté vers l'est de la trajectoire prévue ?

Réponse :

### Exercice 4

On donne  $\vec{u} = (2; 3)$  et  $\vec{v} = (5; -1)$ .

1. Calculer  $\vec{u} + \vec{v}$  et sa norme (arrondir au centième).
2. Calculer  $\vec{u} - \vec{v}$  et sa norme.
3. Calculer  $\vec{v} - \vec{u}$  et sa norme, puis expliquer le lien avec la question précédente.
4. Vérifier que  $(\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{u} - \vec{v})$  a pour composantes le double de celles de  $\vec{u}$ .

Réponse :

### Exercice 5

Un chariot est tiré horizontalement par deux câbles opposés :  $F_1 = 80$  N vers la droite et  $F_2 = 50$  N vers la gauche. On oriente l'axe horizontal vers la droite.

1. Affecter un signe à chaque force selon l'orientation de l'axe, puis calculer la résultante. Préciser sa valeur et son sens.
2. Quelle force supplémentaire, et dans quel sens, faudrait-il appliquer pour immobiliser le chariot ?
3. Une charge de 500 N est suspendue à deux câbles verticaux qui exercent respectivement 300 N et 250 N vers le haut. Calculer la résultante verticale et préciser son sens.
4. La charge de la question précédente monte-t-elle, descend-elle, ou reste-t-elle immobile ? Justifier.

Réponse :

### Exercice 6

Dans un repère orthonormé gradué en millimètres, on donne  $A(2; 3)$  et  $B(8; 11)$ .

1. Calculer les composantes de  $\overrightarrow{AB}$ , puis la distance  $AB$ .
2. Calculer l'angle que fait  $\overrightarrow{AB}$  avec l'axe horizontal (arrondir au dixième de degré).
3. Déterminer les coordonnées du point  $C$  tel que  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$ .
4. Calculer la distance  $AC$  et vérifier qu'elle vaut le double de  $AB$ . Expliquer pourquoi.

Réponse :

Pour aller plus loin

### Exercice 7

Deux câbles tirent sur le même crochet :  $\vec{F}_1$ , d'intensité 300 N, est horizontale ;  $\vec{F}_2$ , d'intensité 200 N, fait un angle de  $60^\circ$  avec l'horizontale. Les deux forces ne sont pas perpendiculaires : on ne peut pas appliquer Pythagore directement.

1. Décomposer chacune des deux forces en composantes horizontale et verticale (arrondir au dixième).
2. En déduire les composantes de la résultante.
3. Calculer l'intensité de la résultante (arrondir au dixième).
4. Calculer l'angle que fait la résultante avec l'horizontale.

Réponse :

### Exercice 8

Une charge est levée par deux élingues symétriques attachées au même point. Chacune exerce une traction de 400 N : la première fait un angle de  $60^\circ$  avec l'horizontale vers la droite, la seconde  $60^\circ$  vers la gauche (soit  $120^\circ$  mesurés depuis l'axe horizontal orienté vers la droite).

1. Décomposer chacune des deux tractions en composantes (arrondir au centième).
2. Calculer les composantes de la résultante et commenter la composante horizontale.
3. En déduire le poids maximal, en newtons, que ce montage peut équilibrer.
4. On écarte davantage les élingues : chacune ne fait plus que  $45^\circ$  avec l'horizontale, toujours à 400 N. Calculer le nouveau poids équilibré et conclure sur l'effet de l'écartement.

Réponse :

### Exercice 9

La tête d'une machine à commande numérique effectue trois déplacements successifs, exprimés en millimètres :  $\vec{d}_1 = (40; 0)$ , puis  $\vec{d}_2 = (0; 30)$ , puis  $\vec{d}_3 = (-25; -10)$ .

1. Calculer les composantes du déplacement résultant.
2. Calculer la distance à vol d'oiseau entre le point de départ et le point d'arrivée.
3. Calculer l'angle que fait le déplacement résultant avec l'axe horizontal (arrondir au dixième de degré).
4. Déterminer les composantes du déplacement de retour au point de départ, ainsi que sa longueur.

Réponse :

### Exercice 10

En électrotechnique, deux tensions alternatives déphasées se représentent par des vecteurs. On considère  $\vec{U}_1$ , d'amplitude 230 V, porté par l'axe horizontal, et  $\vec{U}_2$ , d'amplitude 120 V, perpendiculaire au premier (déphasage de  $90^\circ$ ).

1. Écrire les composantes de  $\vec{U}_1$  et de  $\vec{U}_2$ .
2. Calculer les composantes de la tension totale  $\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$ .
3. Calculer l'amplitude de la tension totale (arrondir au dixième de volt). Comparer avec la somme  $230 + 120$  et expliquer l'écart.
4. Calculer le déphasage de la tension totale par rapport à  $\vec{U}_1$  (arrondir au dixième de degré).

*Réponse :*

# Semaine 5 : Fonctions et lecture graphique

Ce chapitre prolonge le cahier principal. Il se compose de deux parties : (a) des exercices classiques supplémentaires (tronc commun aux quatre BTS), (b) des activités d'application en contexte métier plus complètes, qui enchaînent davantage d'étapes.

## Exercices classiques (suite)

Ces exercices prolongent les deux exercices du cahier de base. Ils enchaînent plusieurs notions et demandent une étape de raisonnement supplémentaire. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. Les quatre derniers, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

### Exercice 1

On étalonne un capteur de température. Pour chaque température  $T$  (en  $^{\circ}\text{C}$ ), on relève la tension  $U$  délivrée (en mV).

| $T$ ( $^{\circ}\text{C}$ ) | 0   | 20  | 40  | 60  |
|----------------------------|-----|-----|-----|-----|
| $U$ (mV)                   | 500 | 660 | 820 | 980 |

1. La tension  $U$  est-elle proportionnelle à la température  $T$  ? Justifier par un calcul de rapports.
2. Montrer que les écarts de tension sont proportionnels aux écarts de température, et calculer la pente  $a$  (en mV/ $^{\circ}\text{C}$ ).
3. En déduire l'expression de  $U$  en fonction de  $T$ , sous la forme  $U = aT + b$ .
4. Prévoir la tension délivrée pour  $T = 75$   $^{\circ}\text{C}$ , puis déterminer la température correspondant à une tension de 900 mV.

Réponse :

### Exercice 2

On reprend le graphique du §5. Il représente le niveau d'eau (en cm) dans deux cuves, en fonction du temps  $x$  (en minutes) : la cuve 1 se remplit (droite  $d_1$ ), la cuve 2 se vide (droite  $d_2$ ).

1. Lire le niveau initial de chaque cuve, puis donner la vitesse de remplissage de la cuve 1 et la vitesse de vidange de la cuve 2, en cm/min.
2. À quel instant les deux cuves sont-elles au même niveau, et quel est ce niveau ?

3. Sur quel intervalle de temps le niveau de la cuve 1 est-il inférieur à celui de la cuve 2 ? Répondre par lecture graphique.
4. À quel instant la cuve 2 est-elle vide ? Le graphique s'arrête à  $x = 8$  : calculer le niveau de la cuve 1 à  $x = 12$  minutes.

Réponse :

### Exercice 3

Une résistance de  $R = 12 \, \Omega$  dissipe une puissance  $P = RI^2$ , où  $P$  est en watts et  $I$  en ampères.

1. Compléter le tableau de valeurs de  $P$  pour  $I = 1$ ,  $I = 2$  et  $I = 3$  ampères.
2. L'intensité passe de 2 A à 6 A. Par quel facteur la puissance est-elle multipliée ? Répondre d'abord par le raisonnement, puis vérifier par le calcul.
3. Déterminer l'intensité pour laquelle la puissance dissipée atteint 300 W.
4. Par mesure de sécurité, on impose de ne pas dépasser 432 W. L'intensité actuelle est de 5 A : de quel pourcentage peut-on encore l'augmenter ?

Réponse :

### Exercice 4

Une barre métallique s'allonge quand elle chauffe. Sa longueur  $L$  (en mm) est une fonction affine de la température  $T$  (en °C). On dispose de deux mesures : à  $T = 20 \, ^\circ\text{C}$ ,  $L = 2000,0 \, \text{mm}$  ; à  $T = 120 \, ^\circ\text{C}$ ,  $L = 2002,4 \, \text{mm}$ .

1. Calculer la pente  $a$  de cette fonction affine. Préciser son unité et l'interpréter.
2. Déterminer  $b$ , puis écrire l'expression de  $L$  en fonction de  $T$ .
3. Calculer la longueur de la barre à  $200 \, ^\circ\text{C}$ .
4. Le montage n'accepte pas une longueur supérieure à  $2003,0 \, \text{mm}$ . Déterminer la température à ne pas dépasser.

Réponse :

### Exercice 5

On découpe des plaques carrées de côté  $x$  (en cm). On note  $S(x)$  l'aire de la plaque, en  $\text{cm}^2$ .

1. Exprimer  $S(x)$ , puis calculer  $S(2)$ ,  $S(4)$  et  $S(6)$ .
2. La fonction  $S$  est-elle linéaire ? Justifier en comparant  $S(4)$  et  $2 \times S(2)$ .
3. On augmente le côté de 50 %. Par quel coefficient l'aire est-elle multipliée ? De quel pourcentage augmente-t-elle ?
4. Déterminer le côté d'une plaque d'aire  $121 \text{ cm}^2$ .

Réponse :

### Exercice 6

Trois grandeurs ont été relevées pour les mêmes valeurs de  $x$ .

| $x$    | 0 | 1 | 2 | 3  | 4  |
|--------|---|---|---|----|----|
| $f(x)$ | 0 | 3 | 6 | 9  | 12 |
| $g(x)$ | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 |
| $h(x)$ | 0 | 2 | 8 | 18 | 32 |

1. Pour chacune des trois fonctions, indiquer s'il s'agit d'une fonction linéaire, affine (non linéaire) ou carré. Justifier à chaque fois par le test adapté (rapport constant, écarts constants, ou facteur  $k^2$ ).
2. Donner l'expression de  $f$ , de  $g$  et de  $h$ .
3. Calculer  $f(10)$ ,  $g(10)$  et  $h(10)$ .
4. Laquelle des trois grandeurs croît le plus vite lorsque  $x$  devient grand ? Justifier.

Réponse :

Pour aller plus loin

### Exercice 7

Une fonction affine  $f$  vérifie  $f(2) = 7$  et  $f(5) = 16$ . On considère par ailleurs la fonction  $g$  définie par  $g(x) = -2x + 6$ .

1. Déterminer les coefficients  $a$  et  $b$  de  $f$ , puis écrire son expression.
2. Déterminer l'antécédent de 0 par  $f$ . Que représente ce nombre pour la droite représentative de  $f$  ?
3. Résoudre  $f(x) = g(x)$ , puis donner les coordonnées du point d'intersection des deux droites.
4. Sans tracer, dire laquelle des deux fonctions est croissante et laquelle est décroissante.

Réponse :

### Exercice 8

On considère la parabole d'équation  $y = x^2$  et la droite d'équation  $y = 3x + 4$ .

1. Vérifier que le point de coordonnées  $(4; 16)$  appartient aux deux courbes.
2. Montrer que chercher les abscisses des points d'intersection revient à résoudre  $x^2 - 3x - 4 = 0$ .
3. Développer  $(x - 4)(x + 1)$  et vérifier que l'on retrouve l'expression précédente.
4. En déduire les coordonnées des deux points d'intersection.

Réponse :

### Exercice 9

La force de résistance de l'air  $F$  (en newtons) qui s'oppose au déplacement d'un véhicule est modélisée par  $F = k v^2$ , où  $v$  est la vitesse (en m/s) et  $k$  une constante. Un essai donne  $F = 15$  N pour  $v = 10$  m/s.

1. Déterminer la valeur de  $k$ .
2. Calculer la force pour  $v = 30$  m/s. Retrouver ce résultat par le facteur  $k^2$  à partir de l'essai initial.
3. Déterminer la vitesse pour laquelle la force atteint 60 N.
4. La vitesse passe de 25 m/s à 50 m/s. La force est-elle doublée ? Justifier.

Réponse :

### Exercice 10

Un atelier produit des pièces. Le coût total de production de  $q$  pièces, en euros, est  $C(q) = 12q + 1500$ . Chaque pièce est vendue 20 €, ce qui donne une recette  $R(q) = 20q$ .

1. Préciser la nature de chacune des deux fonctions  $C$  et  $R$ . Interpréter concrètement les nombres 12, 1500 et 20.
2. Calculer  $C(200)$  et  $R(200)$ . L'atelier est-il bénéficiaire pour 200 pièces ?
3. Le bénéfice est  $B(q) = R(q) - C(q)$ . Montrer que  $B$  est une fonction affine et donner son expression.
4. Déterminer le nombre minimal de pièces à produire pour que l'atelier soit bénéficiaire (seuil de rentabilité), puis calculer le bénéfice réalisé pour 300 pièces.

*Réponse :*

# Semaine 6 : Dérivation

Ce chapitre prolonge le cahier principal. Il se compose de deux parties : (a) des exercices classiques supplémentaires (tronc commun aux quatre BTS), (b) des activités d'application en contexte métier plus complètes, qui enchaînent davantage d'étapes.

## Exercices classiques (suite)

Ces exercices prolongent les deux exercices du cahier de base. Ils enchaînent plusieurs notions et demandent une étape de raisonnement supplémentaire. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. Les quatre derniers, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

### Exercice 1

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2 - 6x + 5$ . On rappelle que la tangente à la courbe au point d'abscisse  $a$  a pour équation  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

1. Calculer  $f'(x)$ , puis  $f(4)$  et  $f'(4)$ .
2. En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse 4, sous la forme  $y = ax + b$ .
3. Déterminer l'abscisse du point où la tangente est horizontale, puis l'ordonnée de ce point et l'équation de cette tangente.
4. Déterminer l'abscisse du point où la tangente a pour pente 4.

Réponse :

### Exercice 2

Un atelier produit  $q$  lots de pièces. Le coût total, en euros, est  $C(q) = 0,5q^2 + 10q + 200$ , et chaque lot est vendu 40 €, ce qui donne une recette  $R(q) = 40q$ .

1. Calculer  $C(20)$  et  $R(20)$ . L'atelier est-il bénéficiaire pour 20 lots ?
2. Le bénéfice est  $B(q) = R(q) - C(q)$ . Montrer que  $B(q) = -0,5q^2 + 30q - 200$ .
3. Calculer  $B'(q)$ , puis résoudre  $B'(q) = 0$ .
4. Étudier le signe de  $B'$  pour justifier qu'il s'agit d'un maximum, puis donner la production optimale et le bénéfice correspondant.

Réponse :

### Exercice 3

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ .

1. Calculer  $f'(x)$ .
2. Vérifier, en développant, que  $f'(x) = 3(x - 3)(x + 1)$ .
3. Résoudre  $f'(x) = 0$ , puis déterminer le signe de  $f'(x)$  selon les valeurs de  $x$ .
4. En déduire les variations de  $f$ , puis calculer les deux extremums et préciser leur nature.

Réponse :

### Exercice 4

On cherche une fonction de la forme  $f(x) = ax^2 + bx + c$  qui vérifie les trois conditions suivantes :  $f(0) = 5$ ,  $f'(0) = -4$  et  $f'(2) = 0$ .

1. Exprimer  $f'(x)$  en fonction de  $a$  et  $b$ .
2. Traduire chacune des trois conditions par une égalité portant sur  $a$ ,  $b$  ou  $c$ .
3. En déduire les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$ , puis l'expression de  $f$ .
4. La condition  $f'(2) = 0$  signifie que la tangente est horizontale en  $x = 2$ . Déterminer s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum, et calculer la valeur correspondante.

Réponse :

### Exercice 5

Un atelier veut clôturer une aire de stockage rectangulaire le long d'un mur existant. Le mur constitue l'un des quatre côtés, les trois autres sont grillagés. On dispose de 60 m de grillage. On note  $x$  la largeur (le côté perpendiculaire au mur), en mètres.

1. Exprimer la longueur du côté parallèle au mur en fonction de  $x$ . Entre quelles valeurs  $x$  peut-il varier ?
2. En déduire l'aire  $A(x)$  de la zone clôturée, développée sous forme de polynôme.
3. Calculer  $A'(x)$  et résoudre  $A'(x) = 0$ .
4. Justifier qu'il s'agit d'un maximum, puis donner les dimensions de l'aire de stockage la plus grande possible et cette aire.

Réponse :

### Exercice 6

Soit  $f(x) = x^2$ . On s'intéresse aux taux de variation moyens de  $f$  entre 1 et une valeur  $b$  de plus en plus proche de 1.

1. Calculer le taux de variation moyen de  $f$  entre 1 et 3, puis entre 1 et 1,5.
2. Calculer de même ce taux entre 1 et 1,1, puis entre 1 et 1,01.
3. Vers quelle valeur ces taux semblent-ils se rapprocher ? Calculer  $f'(1)$  et comparer.
4. Interpréter géométriquement : que deviennent les droites dont on vient de calculer les pentes, lorsque  $b$  se rapproche de 1 ?

Réponse :

Pour aller plus loin

### Exercice 7

Soit  $f(x) = x^3 - 3x$ .

1. Calculer  $f'(x)$ .
2. Déterminer les abscisses des points où la tangente à la courbe est horizontale, puis les ordonnées de ces points.
3. Déterminer les abscisses des points où la tangente a pour coefficient directeur 9.
4. Écrire l'équation de chacune de ces deux tangentes de pente 9.

Réponse :

### Exercice 8

Dans une plaque carrée de 24 cm de côté, on découpe un carré de côté  $x$  à chacun des quatre coins, puis on relève les bords pour former une boîte sans couvercle.

1. Exprimer les dimensions de la boîte en fonction de  $x$ , puis son volume  $V(x)$ . Préciser entre quelles valeurs  $x$  peut varier.
2. Développer  $V(x)$  sous forme de polynôme.
3. Calculer  $V'(x)$ , puis vérifier que  $V'(x) = 12(x - 4)(x - 12)$ . En déduire la seule valeur de  $x$  acceptable.
4. Calculer le volume maximal de la boîte.

Réponse :

### Exercice 9

Pendant la charge d'un composant, la charge accumulée, en coulombs, est donnée par  $q(t) = -0,05t^3 + 1,5t^2$ , où  $t$  est le temps en secondes, pour  $t$  compris entre 0 et 20 s.

1. Calculer l'intensité  $i(t) = q'(t)$ , puis  $i(10)$ .
2. Déterminer les instants auxquels l'intensité est nulle.
3. L'intensité est elle-même une fonction du temps. Calculer  $i'(t)$  et résoudre  $i'(t) = 0$ .
4. En déduire l'instant auquel l'intensité est maximale et la valeur de ce maximum.

Réponse :

### Exercice 10

Un mobile se déplace le long d'un axe. Sa position, en mètres, est  $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ , avec  $t$  en secondes.

1. Calculer  $v(t) = x'(t)$ , puis vérifier que  $v(t) = 3(t-1)(t-3)$ .
2. Déterminer les instants auxquels le mobile est à l'arrêt.
3. Étudier le signe de  $v(t)$  pour  $t \geq 0$ , et en déduire dans quel sens le mobile se déplace sur chaque intervalle.
4. Calculer  $x(0)$ ,  $x(1)$  et  $x(3)$ , puis décrire en une phrase le trajet du mobile entre  $t = 0$  et  $t = 3$  s.

*Réponse :*