



Lycée Jean-Baptiste de Baudre
Agen

Parcours de consolidation en mathématiques

Six semaines pour bien démarrer en BTS

Cahier d'approfondissement

Spécialité Électrotechnique

Version professeur
(énoncés et corrigés)

De la rentrée aux vacances de la Toussaint

Sommaire

Semaine 1 : Calcul, formules et unités	1
Exercices classiques (suite)	1
Activités d'application	4
Semaine 2 : Proportionnalité et géométrie de base	5
Exercices classiques (suite)	5
Activités d'application	9
Semaine 3 : Trigonométrie	11
Exercices classiques (suite)	11
Semaine 4 : Vecteurs	16
Exercices classiques (suite)	16
Semaine 5 : Fonctions et lecture graphique	21
Exercices classiques (suite)	21
Activités d'application	26
Semaine 6 : Dérivation	28
Exercices classiques (suite)	28

Semaine 1 : Calcul, formules et unités

Ce chapitre prolonge le cahier principal. Il se compose de deux parties : (a) des exercices classiques supplémentaires (tronc commun aux quatre BTS), (b) des activités d'application en contexte métier plus complètes, qui enchaînent davantage d'étapes.

Exercices classiques (suite)

Ces exercices prolongent les deux exercices du cahier de base. Ils enchaînent plusieurs notions et demandent une étape de raisonnement supplémentaire. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. Les quatre derniers, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Simplifier chaque expression, puis donner le résultat en notation scientifique.

$$\text{a) } \frac{10^6 \times 10^{-3}}{10^{-2}} \quad \text{b) } (3 \times 10^4) \times (2 \times 10^{-6}) \quad \text{c) } \frac{(4 \times 10^{-3})^2}{8 \times 10^{-4}}$$

Corrigé

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{10^{6+(-3)}}{10^{-2}} &= \frac{10^3}{10^{-2}} = 10^{3-(-2)} = 10^5 = 1 \times 10^5. \\ \text{b) } (3 \times 2) \times 10^{4+(-6)} &= 6 \times 10^{-2}. \\ \text{c) } \frac{4^2 \times 10^{-6}}{8 \times 10^{-4}} &= \frac{16}{8} \times 10^{-6-(-4)} = 2 \times 10^{-2}. \end{aligned}$$

Exercice 2

Une clé USB a une capacité annoncée de 64 Go.

1. Convertir cette capacité en Mo, puis en ko (rappel : 1 Go = 10^3 Mo = 10^6 ko).
2. Un fichier photo pèse 8 Mo. Combien de photos la clé peut-elle contenir ?
3. Un fichier vidéo pèse 1,2 Go. Combien de vidéos la clé peut-elle contenir ?

Corrigé

- 1) 64 Go = 64×10^3 Mo = 64 000 Mo ; 64 Go = 64×10^6 ko = $6,4 \times 10^7$ ko.
- 2) $64\,000 \div 8 = 8\,000$ photos.
- 3) $64 \div 1,2 \approx 53,3$, donc 53 vidéos (on ne compte pas la fraction).

Exercice 3

La loi d'Ohm relie tension U , résistance R et courant I par $U = R \times I$.

1. Isoler R dans cette relation.
2. On mesure $U = 12$ V et $I = 250$ mA. Convertir I en A, puis calculer R en Ω .

3. Exprimer R en $\text{k}\Omega$.

Corrigé

$$1) R = \frac{U}{I}.$$

$$2) I = 250 \text{ mA} = 250 \times 10^{-3} \text{ A} = 0,25 \text{ A. Puis } R = \frac{12}{0,25} = 48 \Omega.$$

$$3) R = 48 \Omega = 48 \times 10^{-3} \text{ k}\Omega = 0,048 \text{ k}\Omega.$$

Exercice 4

Le volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est donné par $V = \pi r^2 h$.

1. Calculer V pour $r = 3 \text{ cm}$ et $h = 10 \text{ cm}$ (valeur exacte en π , puis approchée au dixième).
2. Convertir V en dm^3 , puis en litres (rappel : $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$).
3. Un autre cylindre a le même rayon $r = 3 \text{ cm}$ et un volume $V' = 180 \pi \text{ cm}^3$. Isoler h' dans la formule et calculer sa valeur.

Corrigé

$$1) V = \pi \times 3^2 \times 10 = 90 \pi \approx 282,7 \text{ cm}^3.$$

$$2) 1 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ dm}^3, \text{ donc } V \approx 0,283 \text{ dm}^3 = 0,283 \text{ L.}$$

$$3) V' = \pi r^2 h' \Rightarrow h' = \frac{V'}{\pi r^2} = \frac{180 \pi}{9 \pi} = 20 \text{ cm.}$$

Exercice 5

La vitesse de la lumière vaut $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$. La distance Terre-Lune vaut $d \approx 384\,000 \text{ km}$.

1. Exprimer d en mètres, en notation scientifique.
2. Le temps mis par la lumière pour parcourir la distance Terre-Lune est $t = \frac{d}{c}$. Calculer t en secondes.
3. Exprimer ce temps en millisecondes.

Corrigé

$$1) 384\,000 \text{ km} = 384\,000 \times 10^3 \text{ m} = 3,84 \times 10^8 \text{ m.}$$

$$2) t = \frac{3,84 \times 10^8}{3 \times 10^8} = \frac{3,84}{3} = 1,28 \text{ s.}$$

$$3) t = 1,28 \text{ s} = 1\,280 \text{ ms.}$$

Exercice 6

L'énergie cinétique d'un objet en mouvement est donnée par $E_c = \frac{1}{2} m v^2$.

1. Isoler m dans la formule.
2. Isoler v dans la formule (on suppose $v > 0$).
3. Une voiture de masse $m = 1\,200 \text{ kg}$ a une énergie cinétique $E_c = 150\,000 \text{ J}$. Calculer sa vitesse v en m/s .

Corrigé

$$1) m = \frac{2E_c}{v^2}.$$

$$2) v^2 = \frac{2E_c}{m}, \text{ puis } v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}.$$

$$3) v = \sqrt{\frac{2 \times 150\,000}{1\,200}} = \sqrt{250} \approx 15,8 \text{ m/s}.$$

Pour aller plus loin

Exercice 7

Calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{6} - \frac{1}{2}}$$

Corrigé

$$\text{Numérateur : } \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8+3}{12} = \frac{11}{12}.$$

$$\text{Dénominateur : } \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{5-3}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Résultat : } \frac{11/12}{1/3} = \frac{11}{12} \times 3 = \frac{33}{12} = \frac{11}{4}.$$

Exercice 8

Une fibre optique offre un débit de 10 Gbit/s. On veut transférer un fichier de 2 Go (on prend 1 o = 8 bit).

1. Convertir le débit en bit/s, en notation scientifique.
2. Convertir la taille du fichier en bits.
3. Le temps de transfert vaut $t = \frac{\text{taille}}{\text{débit}}$. Calculer t en secondes.

Corrigé

$$1) 10 \text{ Gbit/s} = 10 \times 10^9 = 10^{10} \text{ bit/s}.$$

$$2) 2 \text{ Go} = 2 \times 10^9 \text{ o} = 2 \times 10^9 \times 8 = 1,6 \times 10^{10} \text{ bit}.$$

$$3) t = \frac{1,6 \times 10^{10}}{10^{10}} = 1,6 \text{ s}.$$

Exercice 9

Un disque a pour aire $S = 314 \text{ mm}^2$. On rappelle $S = \pi r^2$.

1. Isoler r dans la formule.
2. Calculer r en mm (arrondir au dixième).
3. Convertir r en cm.

Corrigé

- 1) $r^2 = \frac{S}{\pi}$, donc $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$.
- 2) $r = \sqrt{\frac{314}{\pi}} \approx \sqrt{99,95} \approx 10,0 \text{ mm}$.
- 3) $r = 10,0 \text{ mm} = 1,00 \text{ cm}$.

Exercice 10

Le rayon d'un atome d'hydrogène vaut environ $r_{\text{atome}} = 5,3 \times 10^{-11} \text{ m}$. Le rayon de la Terre vaut environ $r_{\text{Terre}} = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$.

1. Combien de fois le rayon de la Terre est-il plus grand que celui d'un atome d'hydrogène ? Donner le résultat en notation scientifique.
2. Le rayon d'une cellule biologique moyenne vaut $r_{\text{cellule}} \approx 10^{-5} \text{ m}$. Est-ce plus proche de l'atome ou de la Terre, en ordre de grandeur ?

Corrigé

- 1) $\frac{r_{\text{Terre}}}{r_{\text{atome}}} = \frac{6,4 \times 10^6}{5,3 \times 10^{-11}} \approx 1,21 \times 10^{17}$. La Terre est environ 10^{17} fois plus grande.
- 2) Écart en ordre de grandeur : $10^{-5} \div 10^{-11} = 10^6$ (cellule / atome), et $10^6 \div 10^{-5} = 10^{11}$ (Terre / cellule). La cellule est donc plus proche de l'atome (10^6) que de la Terre (10^{11}) en ordre de grandeur.

Activités d'application

Activité 1 • Énergie consommée, conversion kWh $\leftrightarrow$ J

ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : application d'une formule, conversion d'unités composées, notation scientifique

Lien référentiel : S2.1 — énergie électrique, bilan énergétique

L'énergie consommée par un appareil de puissance P pendant une durée t vaut $W = P \times t$. Selon les unités choisies, le résultat s'exprime en joules (P en W, t en s) ou en kilowattheures (P en kW, t en h).

1. Un radiateur de $P = 2 \text{ kW}$ fonctionne pendant $t = 5 \text{ h}$. Calculer l'énergie W en kWh.
2. Sachant que $1 \text{ kW} = 10^3 \text{ W}$ et $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$, exprimer 1 kWh en joules.
3. En déduire W en joules.
4. Pour le même radiateur, combien d'heures faut-il pour consommer 8 kWh ? (isoler t)

Corrigé

1. $W = 2 \times 5 = 10 \text{ kWh}$.
2. $1 \text{ kWh} = 10^3 \times 3600 = 3,6 \times 10^6 \text{ J}$.
3. $W = 10 \times 3,6 \times 10^6 = 3,6 \times 10^7 \text{ J}$.
4. $t = \frac{W}{P} = \frac{8}{2} = 4 \text{ h}$.

Semaine 2 : Proportionnalité et géométrie de base

Ce chapitre prolonge le cahier principal. Il se compose de deux parties : (a) des exercices classiques supplémentaires (tronc commun aux quatre BTS), (b) des activités d'application en contexte métier plus complètes, qui enchaînent davantage d'étapes.

Exercices classiques (suite)

Ces exercices prolongent les deux exercices du cahier de base. Ils enchaînent plusieurs notions et demandent une étape de raisonnement supplémentaire. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. Les quatre derniers, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Une machine d'usinage produit 45 pièces en 1 h 15 min, à cadence constante.

1. Exprimer cette durée en heures, puis calculer la cadence de la machine, en pièces par heure.
2. En déduire la durée nécessaire pour produire 300 pièces. Donner le résultat en heures et minutes.
3. Après un nouveau réglage, la cadence augmente de 25 %. Calculer la nouvelle cadence, puis la nouvelle durée pour 300 pièces.
4. De combien de minutes le réglage a-t-il fait gagner sur cette série de 300 pièces ?

Corrigé

- 1) 1 h 15 min = 1,25 h, donc la cadence vaut $\frac{45}{1,25} = 36$ pièces/h.
- 2) $\frac{300}{36} \approx 8,33$ h. Or $0,33$ h = $0,33 \times 60 = 20$ min, soit 8 h 20 min.
- 3) Nouvelle cadence : $36 \times 1,25 = 45$ pièces/h. Durée : $\frac{300}{45} \approx 6,67$ h = 6 h 40 min.
- 4) Gain : 8 h 20 min – 6 h 40 min = 1 h 40 min, soit 100 minutes.

Exercice 2

Un atelier achète une matière première 240 € la tonne. Le fournisseur annonce une hausse de 8 %, puis, à la commande, consent une remise de 5 % sur le prix déjà augmenté.

1. Calculer le prix après la hausse, puis le prix après la remise.
2. Calculer le coefficient multiplicateur global de ces deux évolutions successives. En déduire l'évolution globale, en pourcentage.
3. Un second fournisseur affiche 204 € la tonne après une remise de 15 %. Quel était son prix avant remise ?
4. Lequel des deux fournisseurs est le moins cher au final ?

Corrigé

- 1) Après hausse : $240 \times 1,08 = 259,20$ €. Après remise : $259,20 \times 0,95 = 246,24$ €.
- 2) Coefficient global : $1,08 \times 0,95 = 1,026$. Cela correspond à une hausse globale de 2,6 % (et non de $8 - 5 = 3$ %).
- 3) Si P est le prix avant remise, alors $P \times 0,85 = 204$, donc $P = \frac{204}{0,85} = 240$ €.
- 4) Le second fournisseur vend à 204 € contre 246,24 € : il est nettement moins cher.

Exercice 3

Sur un dessin de définition, une plaque rectangulaire est représentée avec une longueur de 84 mm et une largeur de 36 mm. La longueur réelle de la plaque est de 2,10 m.

1. Exprimer la longueur réelle en millimètres, puis déterminer l'échelle du dessin sous la forme $1 : n$.
2. En déduire la largeur réelle de la plaque, en mètres.
3. Calculer l'aire réelle de la plaque, en m^2 , et son aire sur le dessin, en cm^2 .
4. Calculer le rapport entre l'aire réelle et l'aire sur le dessin (les deux étant exprimées dans la même unité). Que remarque-t-on par rapport à n ?

Corrigé

- 1) 2,10 m = 2 100 mm, donc l'échelle vaut $\frac{84}{2\,100} = \frac{1}{25}$: c'est une échelle $1 : 25$.
- 2) Largeur réelle = $36 \times 25 = 900$ mm = 0,90 m.
- 3) Aire réelle = $2,10 \times 0,90 = 1,89$ m^2 . Aire sur le dessin = $84 \times 36 = 3\,024$ $\text{mm}^2 = 30,24$ cm^2 .
- 4) $1,89$ $\text{m}^2 = 1,89 \times 10^6$ mm^2 , donc le rapport vaut $\frac{1,89 \times 10^6}{3\,024} = 625 = 25^2$. Les aires sont dans le rapport n^2 , alors que les longueurs sont dans le rapport n .

Exercice 4

Un réservoir doit contenir 100 L, soit 100 000 cm^3 . Deux formes sont envisagées.

1. **Version parallélépipédique** : la base mesure 80 cm $\times$ 50 cm. Isoler h dans la formule $V = L \ell h$, puis calculer la hauteur nécessaire.
2. **Version cylindrique** : la hauteur imposée est $h = 50$ cm. Isoler r dans la formule $V = \pi r^2 h$, puis calculer le rayon nécessaire (arrondir au dixième).
3. Calculer l'aire au sol occupée par chacune des deux versions, en cm^2 .
4. Quelle version encombre le moins au sol ?

Corrigé

- 1) $h = \frac{V}{L \times \ell} = \frac{100\,000}{80 \times 50} = \frac{100\,000}{4\,000} = 25$ cm.
- 2) $r^2 = \frac{V}{\pi h} = \frac{100\,000}{50 \pi} = \frac{2\,000}{\pi} \approx 636,6$, donc $r \approx 25,2$ cm.
- 3) Version parallélépipédique : $80 \times 50 = 4\,000$ cm^2 . Version cylindrique : $\pi r^2 = \frac{V}{h} = \frac{100\,000}{50} = 2\,000$ cm^2 .
- 4) La version cylindrique occupe deux fois moins de surface au sol, mais elle est deux fois plus haute.

Exercice 5

Un atelier facture ses travaux de découpe selon la règle suivante : 12 € de mise en route, plus 0,25 € par pièce découpée. On note n le nombre de pièces et P le prix à payer, en euros.

1. Calculer le prix à payer pour $n = 20$ pièces, puis pour $n = 60$ pièces.
2. Le prix P est-il proportionnel au nombre n de pièces ? Justifier en comparant les rapports $\frac{P}{n}$ obtenus à la question précédente.
3. Combien de pièces peut-on faire découper avec un budget de 30 € ?
4. Un atelier concurrent facture 0,40 € par pièce, sans mise en route. À partir de quel nombre de pièces le premier atelier devient-il le moins cher ?

Corrigé

- 1) Pour $n = 20$: $P = 12 + 0,25 \times 20 = 17$ €. Pour $n = 60$: $P = 12 + 0,25 \times 60 = 27$ €.
- 2) $\frac{17}{20} = 0,85$ et $\frac{27}{60} = 0,45$: les rapports ne sont pas égaux, donc P n'est *pas* proportionnel à n . C'est la mise en route fixe qui casse la proportionnalité (pour $n = 0$, on paie déjà 12 €).
- 3) $12 + 0,25n = 30$ donne $0,25n = 18$, donc $n = \frac{18}{0,25} = 72$ pièces.
- 4) On cherche n tel que $12 + 0,25n < 0,40n$, soit $12 < 0,15n$, soit $n > 80$. À partir de 81 pièces, le premier atelier est le moins cher (à 80 pièces, les deux coûtent 32 €).

Exercice 6

Une bille d'acier a un rayon $r = 6$ mm. On prendra pour l'acier une masse volumique $\rho = 7,85$ g/cm³.

1. Calculer le volume de la bille en mm³ (valeur exacte, puis approchée au dixième).
2. Convertir ce volume en cm³, puis calculer la masse de la bille en grammes (arrondir au centième).
3. Une seconde bille a un rayon deux fois plus grand. Sans refaire tout le calcul, dire par combien sa masse est multipliée, et donner cette masse.
4. Combien de billes de rayon 6 mm faut-il pour atteindre une masse totale de 1 kg ?

Corrigé

- 1) $V = \frac{4}{3}\pi \times 6^3 = \frac{4}{3}\pi \times 216 = 288\pi \approx 904,8$ mm³.
- 2) $1 \text{ mm}^3 = 10^{-3} \text{ cm}^3$, donc $V \approx 0,905 \text{ cm}^3$. Masse : $m = \rho V \approx 7,85 \times 0,905 \approx 7,10$ g.
- 3) Le rayon intervient au cube : si r est doublé, le volume (donc la masse) est multiplié par $2^3 = 8$. La masse vaut donc environ $8 \times 7,10 \approx 56,8$ g.
- 4) $\frac{1000}{7,10} \approx 140,8$: il faut 141 billes pour dépasser 1 kg (140 billes n'y suffisent pas tout à fait).

_____ Pour aller plus loin _____

Exercice 7

Une machine est affichée 1 434 € toutes taxes comprises (TTC). Le taux de TVA appliqué est de 20 % : le prix TTC s'obtient en multipliant le prix hors taxes (HT) par 1,20.

1. Calculer le prix HT de la machine.
2. En déduire le montant de la TVA.

3. Le vendeur consent une remise et ramène le prix TTC à 1 290,60 €. Calculer le pourcentage de cette remise.
4. Quel est le nouveau prix HT après remise ?

Corrigé

- 1) $HT = \frac{1\,434}{1,20} = 1\,195 \text{ €}$.
- 2) $TVA = 1\,434 - 1\,195 = 239 \text{ €}$ (on vérifie : $1\,195 \times 0,20 = 239$).
- 3) Coefficient : $\frac{1\,290,60}{1\,434} = 0,90$, soit une remise de 10 %.
- 4) $HT = \frac{1\,290,60}{1,20} = 1\,075,50 \text{ €}$ (ou directement $1\,195 \times 0,90 = 1\,075,50 \text{ €}$).

Exercice 8

Le plan d'implantation d'un atelier est tracé à l'échelle 1 : 250.

1. Un mur mesure réellement 17,5 m. Calculer sa longueur sur le plan, en centimètres.
2. Une zone de stockage est représentée par un rectangle de 6 cm $\times$ 4,5 cm sur le plan. Calculer ses dimensions réelles, en mètres.
3. En déduire l'aire réelle de cette zone, en m².
4. Retrouver ce dernier résultat en partant de l'aire de la zone sur le plan et en utilisant le rapport n^2 .

Corrigé

- 1) 17,5 m = 1 750 cm, donc sur le plan : $\frac{1\,750}{250} = 7 \text{ cm}$.
- 2) Longueur réelle = $6 \times 250 = 1\,500 \text{ cm} = 15 \text{ m}$; largeur réelle = $4,5 \times 250 = 1\,125 \text{ cm} = 11,25 \text{ m}$.
- 3) Aire réelle = $15 \times 11,25 = 168,75 \text{ m}^2$.
- 4) Aire sur le plan = $6 \times 4,5 = 27 \text{ cm}^2$. Aire réelle = $27 \times 250^2 = 27 \times 62\,500 = 1\,687\,500 \text{ cm}^2$. Comme $1 \text{ m}^2 = 10^4 \text{ cm}^2$, cela fait bien $168,75 \text{ m}^2$.

Exercice 9

Une rondelle plate a la forme d'une couronne : c'est un disque de rayon extérieur R dans lequel on a percé un disque de rayon intérieur r .

1. Exprimer l'aire S de la couronne en fonction de R et r , puis la factoriser.
2. Calculer S pour $R = 25 \text{ mm}$ et $r = 12 \text{ mm}$ (valeur exacte, puis approchée au dixième).
3. Quel pourcentage du disque plein le perçage a-t-il enlevé ? Arrondir au dixième.
4. Une autre rondelle de même rayon extérieur $R = 25 \text{ mm}$ a une aire de couronne $S = 400\pi \text{ mm}^2$. Isoler r , puis calculer sa valeur.

Corrigé

- 1) $S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2)$.
- 2) $S = \pi (25^2 - 12^2) = \pi (625 - 144) = 481\pi \approx 1\,511,3 \text{ mm}^2$.
- 3) Aire du disque plein : 625π . Part enlevée : $\frac{144\pi}{625\pi} = \frac{144}{625} = 0,2304$, soit environ 23,0 %.
- 4) $\pi (R^2 - r^2) = 400\pi$ donne $R^2 - r^2 = 400$, donc $r^2 = 625 - 400 = 225$ et $r = \sqrt{225} = 15 \text{ mm}$.

Exercice 10

Un laiton est composé de 60 % de cuivre et 40 % de zinc, en masse. On dispose d'un lingot de 25 kg de ce laiton.

1. Calculer la masse de cuivre et la masse de zinc contenues dans le lingot.
2. On ajoute 5 kg de zinc pur au lingot. Calculer la nouvelle masse totale, puis le nouveau pourcentage de zinc.
3. On repart du lingot initial de 25 kg. Quelle masse x de zinc pur faut-il ajouter pour que le zinc représente 60 % de l'alliage obtenu ?

Corrigé

- 1) Cuivre : $25 \times 0,60 = 15$ kg. Zinc : $25 \times 0,40 = 10$ kg.
 2) Nouvelle masse totale : $25 + 5 = 30$ kg, dont $10 + 5 = 15$ kg de zinc. Pourcentage : $\frac{15}{30} = 0,50$, soit 50 % de zinc.
 3) Après ajout de x kg de zinc, la masse de zinc vaut $10 + x$ et la masse totale $25 + x$. On veut $10 + x = 0,60(25 + x)$, soit $10 + x = 15 + 0,60x$, donc $0,40x = 5$ et $x = 12,5$ kg.
 Vérification : $\frac{10 + 12,5}{25 + 12,5} = \frac{22,5}{37,5} = 0,60$. ✓

Activités d'application**Activité 1 • Volume et masse d'un câble de cuivre**

ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : volume d'un cylindre, conversion $\text{mm}^3 \rightarrow \text{cm}^3$, masse volumique **Lien référentiel** : S3.2 — choix des câbles, devis matière

La quantité de cuivre dans un câble se calcule à partir de sa section S et de sa longueur L : $V = S \times L$. La masse se déduit ensuite via la masse volumique : $m = \rho \times V$. Pour le cuivre, $\rho = 8,9 \text{ g/cm}^3$.

On considère un câble de section $S = 10 \text{ mm}^2$ et de longueur $L = 100 \text{ m}$.

1. Exprimer L en millimètres, puis calculer le volume V en mm^3 .
2. Exprimer 1 mm en cm sous la forme d'une puissance de 10, puis en déduire à quoi est égal 1 mm^3 en cm^3 .
3. En déduire V en cm^3 .
4. Calculer la masse m du cuivre du câble, en grammes puis en kilogrammes.

Corrigé

1. $L = 100 \text{ m} = 100\,000 \text{ mm}$, donc $V = 10 \times 100\,000 = 10^6 \text{ mm}^3$.
2. $1 \text{ mm} = 10^{-1} \text{ cm}$, donc $1 \text{ mm}^3 = (10^{-1})^3 = 10^{-3} \text{ cm}^3$.
3. $V = 10^6 \times 10^{-3} = 10^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$.
4. $m = 8,9 \times 1\,000 = 8\,900 \text{ g} = 8,9 \text{ kg}$.

Activité 2 • Identifier un matériau par sa masse volumique

PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : proportionnalité, application de formule **Lien référentiel** : S15 — Matière et matériaux (masse volumique)

La masse volumique relie la masse m d'un échantillon à son volume V .

1. Écrire la relation entre ρ , m et V .
2. Un échantillon a une masse $m = 270 \text{ g}$ pour un volume $V = 100 \text{ cm}^3$. Calculer sa masse

volumique en g/cm^3 .

3. Sachant que l'aluminium a $\rho = 2,7 \text{ g/cm}^3$, de quel matériau s'agit-il probablement ?

Corrigé

1. $\rho = \frac{m}{V}$.
2. $\rho = \frac{270}{100} = 2,7 \text{ g/cm}^3$.
3. Cette valeur correspond à l'aluminium.

Semaine 3 : Trigonométrie

Ce chapitre prolonge le cahier principal. Il se compose de deux parties : (a) des exercices classiques supplémentaires (tronc commun aux quatre BTS), (b) des activités d'application en contexte métier plus complètes, qui enchaînent davantage d'étapes.

Exercices classiques (suite)

Ces exercices prolongent les deux exercices du cahier de base. Ils enchaînent plusieurs notions et demandent une étape de raisonnement supplémentaire. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. Les quatre derniers, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Une rampe d'accès rectiligne mesure 6 m de long et permet de franchir une dénivellation de 0,50 m.

1. Calculer l'angle que fait la rampe avec l'horizontale (arrondir au dixième de degré).
2. Calculer la longueur horizontale couverte par la rampe (arrondir au centimètre).
3. La pente, en pourcentage, est le rapport de la hauteur sur la longueur horizontale. La calculer. La réglementation impose une pente inférieure à 5 % : la rampe est-elle conforme ?
4. Pour la même dénivellation de 0,50 m, quelle longueur horizontale faudrait-il pour obtenir une pente de 5 % ?

Corrigé

- 1) La hauteur est le côté opposé et la rampe l'hypoténuse : $\sin \alpha = \frac{0,50}{6} \approx 0,0833$, donc $\alpha = \sin^{-1}(0,0833) \approx 4,8^\circ$.
- 2) $\sqrt{6^2 - 0,5^2} = \sqrt{36 - 0,25} = \sqrt{35,75} \approx 5,98$ m.
- 3) Pente = $\frac{0,50}{5,98} \approx 0,0836$, soit environ 8,4 %. C'est supérieur à 5 % : la rampe n'est **pas** conforme.
- 4) Il faut $\frac{0,50}{L} = 0,05$, donc $L = \frac{0,50}{0,05} = 10$ m : il faut presque doubler la longueur.

Exercice 2

Un bâtiment de 9 m de large est couvert par une toiture à deux pans symétriques. Chaque pan fait un angle de 35° avec l'horizontale.

1. Justifier que la demi-largeur du bâtiment vaut 4,50 m, puis calculer la hauteur du faîtage au-dessus du niveau des murs (arrondir au centimètre).
2. Calculer la longueur d'un pan de toiture, mesurée du mur au faîtage (arrondir au centimètre).
3. Vérifier ce dernier résultat par le théorème de Pythagore.

4. Le bâtiment mesure 12 m de long. Calculer l'aire totale de la toiture, en m^2 .

Corrigé

- 1) Les deux pans étant symétriques, chacun couvre la moitié de la largeur, soit $\frac{9}{2} = 4,50$ m. La hauteur est le côté opposé à l'angle de 35° et la demi-largeur le côté adjacent : hauteur = $4,50 \times \tan 35^\circ \approx 4,50 \times 0,7002 \approx 3,15$ m.
 2) Le pan est l'hypoténuse : longueur = $\frac{4,50}{\cos 35^\circ} \approx \frac{4,50}{0,8192} \approx 5,49$ m.
 3) $\sqrt{4,50^2 + 3,15^2} = \sqrt{20,25 + 9,92} = \sqrt{30,17} \approx 5,49$ m. ✓
 4) Un pan : $5,49 \times 12 \approx 65,9$ m^2 . Les deux pans : environ 131,8 m^2 .

Exercice 3

Une force de 250 N est appliquée sur une pièce, selon une direction faisant un angle de 30° avec l'horizontale.

- Calculer la composante horizontale de cette force (arrondir au dixième de newton).
- Calculer sa composante verticale.
- Vérifier que ces deux composantes redonnent bien une force de 250 N.
- Une autre force a une composante horizontale de 200 N et une composante verticale de 150 N. Calculer son intensité et l'angle qu'elle fait avec l'horizontale.

Corrigé

- 1) La composante horizontale est le côté adjacent : $250 \times \cos 30^\circ \approx 250 \times 0,8660 \approx 216,5$ N.
 2) La composante verticale est le côté opposé : $250 \times \sin 30^\circ = 250 \times 0,5 = 125,0$ N.
 3) $\sqrt{216,5^2 + 125^2} = \sqrt{46\,872 + 15\,625} = \sqrt{62\,497} \approx 250,0$ N. ✓
 4) Intensité : $\sqrt{200^2 + 150^2} = \sqrt{40\,000 + 22\,500} = \sqrt{62\,500} = 250$ N. Angle : $\tan \alpha = \frac{150}{200} = 0,75$, donc $\alpha = \tan^{-1}(0,75) \approx 36,9^\circ$.

Exercice 4

Un triangle rectangle a pour côtés de l'angle droit 40 mm et 75 mm. On note α l'angle dont le côté opposé mesure 40 mm.

- Calculer la longueur de l'hypoténuse.
- Calculer l'angle α (arrondir au dixième de degré).
- En déduire le second angle aigu β , sans nouvelle trigonométrie inverse.
- Calculer $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ à 10^{-4} près, puis vérifier numériquement que $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$.

Corrigé

- 1) $\sqrt{40^2 + 75^2} = \sqrt{1\,600 + 5\,625} = \sqrt{7\,225} = 85$ mm.
 2) $\tan \alpha = \frac{40}{75} \approx 0,5333$, donc $\alpha = \tan^{-1}(0,5333) \approx 28,1^\circ$.
 3) Les deux angles aigus sont complémentaires : $\beta = 90^\circ - 28,1^\circ = 61,9^\circ$.
 4) $\sin \alpha = \frac{40}{85} \approx 0,4706$ et $\cos \alpha = \frac{75}{85} \approx 0,8824$. Alors $0,4706^2 + 0,8824^2 \approx 0,2215 + 0,7786 \approx 1,0001$, soit 1 aux arrondis près. ✓

Exercice 5

Un triangle a pour côtés 1, $\sqrt{3}$ et 2 (en centimètres).

1. Identifier l'hypoténuse, puis vérifier par le calcul que ce triangle est bien rectangle.
2. Déterminer les deux angles aigus en utilisant le tableau des valeurs particulières.
3. Vérifier la cohérence du résultat de deux façons : par la somme des angles, et en calculant $\tan$ du plus grand angle aigu.
4. On fabrique une pièce de même forme, mais dont l'hypoténuse mesure 10 cm. Calculer ses deux autres côtés, puis dire ce que deviennent les angles.

Corrigé

- 1) L'hypoténuse est le côté le plus long : 2. Vérification : $2^2 = 4$ et $1^2 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4$. Il y a égalité, donc le triangle est rectangle.
- 2) Pour l'angle α opposé au côté 1 : $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, donc $\alpha = 30^\circ$. L'autre angle aigu vaut $\beta = 60^\circ$.
- 3) $30^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. ✓ Et $\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$, conforme au tableau. ✓
- 4) L'hypoténuse est multipliée par 5, donc tous les côtés aussi : $1 \times 5 = 5$ cm et $\sqrt{3} \times 5 \approx 8,66$ cm. Les angles, eux, sont inchangés : 30° et 60° . Un agrandissement modifie les longueurs, jamais les angles.

Exercice 6

Cet exercice porte sur l'usage de la calculatrice et le contrôle des résultats.

1. En mode degré, calculer $\sin 30^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\tan 45^\circ$ et $\sin 90^\circ$.
2. Que renvoie la calculatrice pour $\sin 90$ si elle est restée en mode radian ? Comment ce seul résultat permet-il de détecter l'erreur de mode ?
3. Calculer $\tan^{-1}(1)$ dans chacun des deux modes, et commenter les deux résultats obtenus.
4. Un étudiant annonce avoir trouvé $\sin \alpha = 1,2$ pour un angle aigu d'un triangle rectangle. Expliquer, sans calculatrice, pourquoi ce résultat est nécessairement faux.

Corrigé

- 1) $\sin 30^\circ = 0,5$; $\cos 60^\circ = 0,5$; $\tan 45^\circ = 1$; $\sin 90^\circ = 1$.
- 2) En mode radian, la calculatrice interprète 90 comme 90 radians et renvoie environ 0,894. Comme $\sin 90^\circ$ doit valoir exactement 1, tout autre résultat signale que le mode est incorrect.
- 3) En mode degré : $\tan^{-1}(1) = 45^\circ$. En mode radian : $\tan^{-1}(1) \approx 0,7854$. C'est le même angle exprimé dans deux unités différentes, et non deux angles différents.
- 4) Le sinus est le rapport du côté opposé à l'hypoténuse. Or l'hypoténuse est toujours le plus long côté, donc ce rapport est toujours strictement inférieur à 1. Une valeur de 1,2 est impossible : il y a eu confusion de côtés, ou emploi de la tangente à la place du sinus.

Pour aller plus loin

Exercice 7

On considère un triangle rectangle d'hypoténuse c , dont le côté opposé à l'angle aigu α mesure a et le côté adjacent b .

1. Exprimer $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ en fonction de a , b et c .
2. Calculer $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2$ et le mettre sous forme d'une seule fraction.

3. Conclure, en utilisant le théorème de Pythagore, que cette somme vaut toujours 1.
4. Application : on sait que $\sin \alpha = 0,28$. Calculer $\cos \alpha$ sans passer par l'angle, puis en déduire $\tan \alpha$ à 10^{-2} près.

Corrigé

- 1) $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ et $\cos \alpha = \frac{b}{c}$.
- 2) $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$.
- 3) D'après le théorème de Pythagore, $a^2 + b^2 = c^2$, donc cette fraction vaut $\frac{c^2}{c^2} = 1$.
- 4) $(\cos \alpha)^2 = 1 - 0,28^2 = 1 - 0,0784 = 0,9216$, donc $\cos \alpha = \sqrt{0,9216} = 0,96$ (le cosinus d'un angle aigu est positif). Puis $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,28}{0,96} \approx 0,29$.

Exercice 8

Une échelle de 5 m est appuyée contre un mur vertical et fait un angle de 70° avec le sol.

1. Calculer la hauteur atteinte sur le mur (arrondir au centimètre).
2. Calculer la distance entre le pied de l'échelle et le mur.
3. Une règle de sécurité courante veut que le pied soit écarté du mur d'un quart de la longueur de l'échelle. Calculer cette distance, puis l'angle correspondant (arrondir au dixième de degré).
4. Avec ce nouveau réglage, quelle hauteur atteint-on sur le mur ? L'échelle est-elle plus ou moins redressée qu'au départ ?

Corrigé

- 1) La hauteur est le côté opposé à l'angle de 70° et l'échelle l'hypoténuse : $5 \times \sin 70^\circ \approx 5 \times 0,9397 \approx 4,70$ m.
- 2) La distance au mur est le côté adjacent : $5 \times \cos 70^\circ \approx 5 \times 0,3420 \approx 1,71$ m.
- 3) Un quart de 5 m fait 1,25 m. Alors $\cos \alpha = \frac{1,25}{5} = 0,25$, donc $\alpha = \cos^{-1}(0,25) \approx 75,5^\circ$.
- 4) Hauteur = $5 \times \sin 75,5^\circ \approx 5 \times 0,9682 \approx 4,84$ m. L'angle est passé de 70° à $75,5^\circ$: l'échelle est plus redressée, et atteint donc plus haut.

Exercice 9

Pour mesurer la hauteur d'un pylône, un technicien se place à 40 m de son pied et vise le sommet. L'appareil de visée, placé à 1,60 m du sol, indique un angle de 32° au-dessus de l'horizontale.

1. Calculer la hauteur du sommet au-dessus du niveau de l'appareil de visée (arrondir au décimètre).
2. En déduire la hauteur totale du pylône.
3. De quelle distance le technicien devrait-il se placer pour viser le sommet sous un angle de 45° ?
4. Reprendre la question 1 avec un angle de 33° au lieu de 32° . Que peut-on en conclure sur la précision exigée pour la visée ?

Corrigé

- 1) La hauteur cherchée est le côté opposé et la distance au sol le côté adjacent : $40 \times \tan 32^\circ \approx 40 \times 0,6249 \approx 25,0$ m.
- 2) Hauteur totale $\approx 25,0 + 1,60 = 26,6$ m.
- 3) Sous un angle de 45° , on a $\tan 45^\circ = 1$, donc la distance horizontale est égale à la hauteur visée, soit environ 25,0 m.
- 4) $40 \times \tan 33^\circ \approx 40 \times 0,6494 \approx 26,0$ m, soit environ 1 m de plus. Une erreur de 1° sur la visée entraîne donc une erreur de l'ordre du mètre sur la hauteur : la mesure de l'angle doit être soignée.

Exercice 10

La section d'une glissière a la forme d'un trapèze rectangle : la grande base mesure 80 mm, la petite base 50 mm et la hauteur 35 mm. L'un des côtés est perpendiculaire aux deux bases, l'autre est oblique.

1. Calculer le décalage horizontal entre les extrémités des deux bases, du côté oblique.
2. En déduire la longueur du côté oblique (arrondir au dixième de millimètre).
3. Calculer l'angle que fait le côté oblique avec la grande base (arrondir au dixième de degré).
4. Calculer l'aire de la section, en mm^2 puis en cm^2 (rappel : aire d'un trapèze = $\frac{\text{grande base} + \text{petite base}}{2} \times \text{hauteur}$).

Corrigé

- 1) Le côté perpendiculaire n'introduit aucun décalage, donc tout l'écart se reporte du côté oblique : $80 - 50 = 30$ mm.
- 2) Le côté oblique est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés 30 mm et 35 mm : $\sqrt{900 + 1225} = \sqrt{2125} \approx 46,1$ mm.
- 3) $\tan \alpha = \frac{35}{30} \approx 1,1667$, donc $\alpha = \tan^{-1}(1,1667) \approx 49,4^\circ$.
- 4) Aire = $\frac{80 + 50}{2} \times 35 = 65 \times 35 = 2275 \text{ mm}^2$. Comme $1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$, cela fait $22,75 \text{ cm}^2$.

Semaine 4 : Vecteurs

Ce chapitre prolonge le cahier principal. Il se compose de deux parties : (a) des exercices classiques supplémentaires (tronc commun aux quatre BTS), (b) des activités d'application en contexte métier plus complètes, qui enchaînent davantage d'étapes.

Exercices classiques (suite)

Ces exercices prolongent les deux exercices du cahier de base. Ils enchaînent plusieurs notions et demandent une étape de raisonnement supplémentaire. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. Les quatre derniers, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Un câble tire une charge avec une force de 400 N, selon une direction faisant un angle de 25° au-dessus de l'horizontale.

1. Calculer les composantes horizontale et verticale de cette force (arrondir au dixième).
2. Vérifier, à partir de ces composantes, que la norme retrouvée vaut bien 400 N.
3. Retrouver l'angle de 25° à partir des composantes calculées.
4. On souhaite que la composante verticale atteigne 200 N, sans changer l'intensité de 400 N. Quel angle faut-il donner au câble ?

Corrigé

- 1) $x = 400 \times \cos 25^\circ \approx 400 \times 0,9063 \approx 362,5$ N ; $y = 400 \times \sin 25^\circ \approx 400 \times 0,4226 \approx 169,0$ N.
- 2) $\sqrt{362,5^2 + 169,0^2} = \sqrt{131\,406 + 28\,561} = \sqrt{159\,967} \approx 400,0$ N. ✓
- 3) $\tan \theta = \frac{169,0}{362,5} \approx 0,4662$, donc $\theta = \tan^{-1}(0,4662) \approx 25,0^\circ$. ✓
- 4) Il faut $400 \times \sin \theta = 200$, soit $\sin \theta = 0,5$, donc $\theta = 30^\circ$.

Exercice 2

Deux forces s'appliquent en un même point d'une structure : $\vec{F}_1 = (60 ; 0)$ et $\vec{F}_2 = (0 ; 80)$, en newtons.

1. Calculer les composantes de la résultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, son intensité et son angle avec l'horizontale.
2. Un système est en équilibre lorsque la somme de toutes les forces est le vecteur nul. Déterminer les composantes de la force $\vec{F}_3$ qu'il faut ajouter pour équilibrer le point.
3. Calculer l'intensité de $\vec{F}_3$ et préciser sa direction par rapport à $\vec{R}$.
4. Vérifier par le calcul que $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ est bien le vecteur nul.

Corrigé

- 1) $\vec{R} = (60; 80)$, donc $\|\vec{R}\| = \sqrt{3\,600 + 6\,400} = \sqrt{10\,000} = 100$ N et $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{80}{60}\right) \approx 53,1^\circ$.
- 2) Il faut $\vec{R} + \vec{F}_3 = \vec{0}$, donc $\vec{F}_3 = -\vec{R} = (-60; -80)$.
- 3) $\|\vec{F}_3\| = \sqrt{3\,600 + 6\,400} = 100$ N : même intensité que $\vec{R}$, même direction, mais sens opposé.
- 4) $(60 + 0 - 60; 0 + 80 - 80) = (0; 0)$. ✓

Exercice 3

Un drone de surveillance avance à 15 km/h vers le nord. Un vent latéral le pousse vers l'est à 6 km/h. On repère l'est par l'axe horizontal et le nord par l'axe vertical.

1. Écrire les composantes du vecteur vitesse propre du drone et du vecteur vitesse du vent, puis celles de la vitesse réelle.
2. Calculer la vitesse réelle du drone, en km/h (arrondir au centième).
3. Calculer l'angle de dérive, c'est-à-dire l'angle entre la trajectoire réelle et la direction du nord (arrondir au dixième de degré).
4. Au bout de 2 heures de vol, de combien de kilomètres le drone s'est-il écarté vers l'est de la trajectoire prévue ?

Corrigé

- 1) Vitesse propre : $(0; 15)$. Vent : $(6; 0)$. Vitesse réelle : $(6; 15)$.
- 2) $\sqrt{36 + 225} = \sqrt{261} \approx 16,16$ km/h.
- 3) La dérive se mesure par rapport au nord, donc l'angle a pour tangente $\frac{6}{15} = 0,4$: $\theta = \tan^{-1}(0,4) \approx 21,8^\circ$.
- 4) La composante est vaut 6 km/h, donc en 2 heures l'écart est de $6 \times 2 = 12$ km.

Exercice 4

On donne $\vec{u} = (2; 3)$ et $\vec{v} = (5; -1)$.

1. Calculer $\vec{u} + \vec{v}$ et sa norme (arrondir au centième).
2. Calculer $\vec{u} - \vec{v}$ et sa norme.
3. Calculer $\vec{v} - \vec{u}$ et sa norme, puis expliquer le lien avec la question précédente.
4. Vérifier que $(\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{u} - \vec{v})$ a pour composantes le double de celles de $\vec{u}$.

Corrigé

- 1) $\vec{u} + \vec{v} = (7; 2)$, de norme $\sqrt{49 + 4} = \sqrt{53} \approx 7,28$.
- 2) $\vec{u} - \vec{v} = (2 - 5; 3 - (-1)) = (-3; 4)$, de norme $\sqrt{9 + 16} = 5$.
- 3) $\vec{v} - \vec{u} = (3; -4)$, de norme 5 également. Les deux vecteurs sont opposés : mêmes direction et norme, sens contraires.
- 4) $(7; 2) + (-3; 4) = (4; 6)$, ce qui est bien le double de $(2; 3)$. ✓

Exercice 5

Un chariot est tiré horizontalement par deux câbles opposés : $F_1 = 80$ N vers la droite et $F_2 = 50$ N vers la gauche. On oriente l'axe horizontal vers la droite.

1. Affecter un signe à chaque force selon l'orientation de l'axe, puis calculer la résultante.

Préciser sa valeur et son sens.

2. Quelle force supplémentaire, et dans quel sens, faudrait-il appliquer pour immobiliser le chariot ?
3. Une charge de 500 N est suspendue à deux câbles verticaux qui exercent respectivement 300 N et 250 N vers le haut. Calculer la résultante verticale et préciser son sens.
4. La charge de la question précédente monte-t-elle, descend-elle, ou reste-t-elle immobile ? Justifier.

Corrigé

- 1) $F_1 = +80$ N et $F_2 = -50$ N, donc la résultante vaut $80 - 50 = +30$ N : 30 N vers la droite.
- 2) Il faudrait une force de 30 N vers la gauche, pour que la somme soit nulle.
- 3) En orientant l'axe vers le haut : $+300 + 250 - 500 = +50$ N, soit 50 N vers le haut.
- 4) La résultante n'est pas nulle et elle est dirigée vers le haut : la charge monte. Pour qu'elle reste immobile, il faudrait que les tensions totalisent exactement 500 N.

Exercice 6

Dans un repère orthonormé gradué en millimètres, on donne $A(2; 3)$ et $B(8; 11)$.

1. Calculer les composantes de $\overrightarrow{AB}$, puis la distance AB .
2. Calculer l'angle que fait $\overrightarrow{AB}$ avec l'axe horizontal (arrondir au dixième de degré).
3. Déterminer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$.
4. Calculer la distance AC et vérifier qu'elle vaut le double de AB . Expliquer pourquoi.

Corrigé

- 1) $\overrightarrow{AB} = (8 - 2; 11 - 3) = (6; 8)$, donc $AB = \sqrt{36 + 64} = 10$ mm.
- 2) $\tan \theta = \frac{8}{6} \approx 1,333$, donc $\theta \approx 53,1^\circ$.
- 3) $\overrightarrow{BC} = (6; 8)$ signifie que l'on ajoute 6 à l'abscisse de B et 8 à son ordonnée : $C(8 + 6; 11 + 8)$, soit $C(14; 19)$.
- 4) $\overrightarrow{AC} = (12; 16)$, donc $AC = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$ mm, soit bien le double. C'est logique : d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB}$, puisque les deux vecteurs sont identiques.

Pour aller plus loin

Exercice 7

Deux câbles tirent sur le même crochet : $\overrightarrow{F_1}$, d'intensité 300 N, est horizontale ; $\overrightarrow{F_2}$, d'intensité 200 N, fait un angle de 60° avec l'horizontale. Les deux forces ne sont pas perpendiculaires : on ne peut pas appliquer Pythagore directement.

1. Décomposer chacune des deux forces en composantes horizontale et verticale (arrondir au dixième).
2. En déduire les composantes de la résultante.
3. Calculer l'intensité de la résultante (arrondir au dixième).
4. Calculer l'angle que fait la résultante avec l'horizontale.

Corrigé

- 1) $\vec{F}_1 = (300; 0)$. Pour $\vec{F}_2$: $x = 200 \times \cos 60^\circ = 100,0$ N et $y = 200 \times \sin 60^\circ \approx 173,2$ N, donc $\vec{F}_2 \approx (100,0; 173,2)$.
- 2) $\vec{R} = (300 + 100,0; 0 + 173,2) = (400,0; 173,2)$.
- 3) $\|\vec{R}\| = \sqrt{160\,000 + 30\,000} = \sqrt{190\,000} \approx 435,9$ N. On remarque que ce n'est ni la somme 500 N, ni $\sqrt{300^2 + 200^2}$.
- 4) $\tan \theta = \frac{173,2}{400,0} \approx 0,4330$, donc $\theta \approx 23,4^\circ$.

Exercice 8

Une charge est levée par deux élingues symétriques attachées au même point. Chacune exerce une traction de 400 N : la première fait un angle de 60° avec l'horizontale vers la droite, la seconde 60° vers la gauche (soit 120° mesurés depuis l'axe horizontal orienté vers la droite).

1. Décomposer chacune des deux tractions en composantes (arrondir au centième).
2. Calculer les composantes de la résultante et commenter la composante horizontale.
3. En déduire le poids maximal, en newtons, que ce montage peut équilibrer.
4. On écarte davantage les élingues : chacune ne fait plus que 45° avec l'horizontale, toujours à 400 N. Calculer le nouveau poids équilibré et conclure sur l'effet de l'écartement.

Corrigé

- 1) Élingue de droite : $x = 400 \times \cos 60^\circ = 200,00$ N et $y = 400 \times \sin 60^\circ \approx 346,41$ N. Élingue de gauche : $x = -200,00$ N et $y \approx 346,41$ N.
- 2) $\vec{R} = (200,00 - 200,00; 346,41 + 346,41) = (0; 692,82)$. La composante horizontale est nulle : les deux élingues étant symétriques, leurs tirages latéraux se compensent exactement.
- 3) La résultante est verticale et vaut environ 692,8 N vers le haut : c'est le poids maximal équilibré par ce montage.
- 4) À 45° : $y = 400 \times \sin 45^\circ \approx 282,84$ N par élingue, soit 565,7 N au total. Plus les élingues sont écartées de la verticale, moins elles portent, alors que leur tension reste la même : une part croissante de l'effort part en tirage latéral.

Exercice 9

La tête d'une machine à commande numérique effectue trois déplacements successifs, exprimés en millimètres : $\vec{d}_1 = (40; 0)$, puis $\vec{d}_2 = (0; 30)$, puis $\vec{d}_3 = (-25; -10)$.

1. Calculer les composantes du déplacement résultant.
2. Calculer la distance à vol d'oiseau entre le point de départ et le point d'arrivée.
3. Calculer l'angle que fait le déplacement résultant avec l'axe horizontal (arrondir au dixième de degré).
4. Déterminer les composantes du déplacement de retour au point de départ, ainsi que sa longueur.

Corrigé

- 1) $(40 + 0 - 25; 0 + 30 - 10) = (15; 20)$.
- 2) $\sqrt{225 + 400} = \sqrt{625} = 25$ mm.
- 3) $\tan \theta = \frac{20}{15} \approx 1,333$, donc $\theta \approx 53,1^\circ$.
- 4) Le retour est le vecteur opposé : $(-15; -20)$, de longueur 25 mm également. On remarque que le trajet aller a mesuré $40 + 30 + \sqrt{625 + 100} \approx 96,9$ mm, pour un déplacement net de seulement 25 mm.

Exercice 10

En électrotechnique, deux tensions alternatives déphasées se représentent par des vecteurs. On considère $\vec{U}_1$, d'amplitude 230 V, porté par l'axe horizontal, et $\vec{U}_2$, d'amplitude 120 V, perpendiculaire au premier (déphasage de 90°).

1. Écrire les composantes de $\vec{U}_1$ et de $\vec{U}_2$.
2. Calculer les composantes de la tension totale $\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$.
3. Calculer l'amplitude de la tension totale (arrondir au dixième de volt). Comparer avec la somme $230 + 120$ et expliquer l'écart.
4. Calculer le déphasage de la tension totale par rapport à $\vec{U}_1$ (arrondir au dixième de degré).

Corrigé

- 1) $\vec{U}_1 = (230; 0)$ et $\vec{U}_2 = (0; 120)$.
- 2) $\vec{U} = (230; 120)$.
- 3) $\|\vec{U}\| = \sqrt{52\,900 + 14\,400} = \sqrt{67\,300} \approx 259,4$ V. C'est nettement inférieur à 350 V : des tensions déphasées ne s'additionnent pas comme des nombres, seule l'addition vectorielle est valable.
- 4) $\tan \varphi = \frac{120}{230} \approx 0,5217$, donc $\varphi = \tan^{-1}(0,5217) \approx 27,6^\circ$.

Semaine 5 : Fonctions et lecture graphique

Ce chapitre prolonge le cahier principal. Il se compose de deux parties : (a) des exercices classiques supplémentaires (tronc commun aux quatre BTS), (b) des activités d'application en contexte métier plus complètes, qui enchaînent davantage d'étapes.

Exercices classiques (suite)

Ces exercices prolongent les deux exercices du cahier de base. Ils enchaînent plusieurs notions et demandent une étape de raisonnement supplémentaire. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. Les quatre derniers, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

On étalonne un capteur de température. Pour chaque température T (en $^{\circ}\text{C}$), on relève la tension U délivrée (en mV).

T ($^{\circ}\text{C}$)	0	20	40	60
U (mV)	500	660	820	980

1. La tension U est-elle proportionnelle à la température T ? Justifier par un calcul de rapports.
2. Montrer que les écarts de tension sont proportionnels aux écarts de température, et calculer la pente a (en mV/ $^{\circ}\text{C}$).
3. En déduire l'expression de U en fonction de T , sous la forme $U = aT + b$.
4. Prévoir la tension délivrée pour $T = 75$ $^{\circ}\text{C}$, puis déterminer la température correspondant à une tension de 900 mV.

Corrigé

- 1) $\frac{660}{20} = 33$ mais $\frac{820}{40} = 20,5$: les rapports ne sont pas égaux, donc U n'est *pas* proportionnelle à T . On le voit aussi sur la première colonne : pour $T = 0$, la tension vaut déjà 500 mV.
- 2) Quand T augmente de 20, U augmente de 160 à chaque fois. La pente vaut $a = \frac{160}{20} = 8$ mV/ $^{\circ}\text{C}$.
- 3) Pour $T = 0$, on lit $U = 500$, donc $b = 500$: $U = 8T + 500$.
- 4) $U(75) = 8 \times 75 + 500 = 1100$ mV. Pour $U = 900$: $8T + 500 = 900$, donc $8T = 400$ et $T = 50$ $^{\circ}\text{C}$.

Exercice 2

On reprend le graphique du §5. Il représente le niveau d'eau (en cm) dans deux cuves, en fonction du temps x (en minutes) : la cuve 1 se remplit (droite d_1), la cuve 2 se vide (droite d_2).

1. Lire le niveau initial de chaque cuve, puis donner la vitesse de remplissage de la cuve 1 et la vitesse de vidange de la cuve 2, en cm/min.

2. À quel instant les deux cuves sont-elles au même niveau, et quel est ce niveau ?
3. Sur quel intervalle de temps le niveau de la cuve 1 est-il inférieur à celui de la cuve 2 ? Répondre par lecture graphique.
4. À quel instant la cuve 2 est-elle vide ? Le graphique s'arrête à $x = 8$: calculer le niveau de la cuve 1 à $x = 12$ minutes.

Corrigé

- 1) Niveaux initiaux (à $x = 0$) : 1 cm pour la cuve 1, 7 cm pour la cuve 2. La cuve 1 monte de 2 cm par minute ($a_1 = 2$) ; la cuve 2 descend de 1 cm par minute ($a_2 = -1$).
- 2) Au point d'intersection : à $x = 2$ minutes, les deux niveaux valent 5 cm.
- 3) Avant l'intersection, d_1 est sous d_2 : le niveau de la cuve 1 est inférieur pour x compris entre 0 et 2 minutes.
- 4) La cuve 2 est vide quand d_2 coupe l'axe des abscisses, soit à $x = 7$ minutes. Pour la cuve 1 : $f_1(12) = 2 \times 12 + 1 = 25$ cm (valeur hors du graphique, obtenue par le calcul).

Exercice 3

Une résistance de $R = 12 \, \Omega$ dissipe une puissance $P = RI^2$, où P est en watts et I en ampères.

1. Compléter le tableau de valeurs de P pour $I = 1$, $I = 2$ et $I = 3$ ampères.
2. L'intensité passe de 2 A à 6 A. Par quel facteur la puissance est-elle multipliée ? Répondre d'abord par le raisonnement, puis vérifier par le calcul.
3. Déterminer l'intensité pour laquelle la puissance dissipée atteint 300 W.
4. Par mesure de sécurité, on impose de ne pas dépasser 432 W. L'intensité actuelle est de 5 A : de quel pourcentage peut-on encore l'augmenter ?

Corrigé

- 1) $P(1) = 12 \, \text{W}$; $P(2) = 12 \times 4 = 48 \, \text{W}$; $P(3) = 12 \times 9 = 108 \, \text{W}$.
- 2) L'intensité est multipliée par 3, donc la puissance par $3^2 = 9$. Vérification : $P(6) = 12 \times 36 = 432 \, \text{W}$, et $432 = 9 \times 48$.
- 3) $12 I^2 = 300$ donne $I^2 = 25$, donc $I = 5 \, \text{A}$ (on ne retient pas $I = -5$, sans signification ici).
- 4) D'après la question 2, $P = 432 \, \text{W}$ correspond à $I = 6 \, \text{A}$. On peut donc passer de 5 à 6 A, soit une hausse de $\frac{6-5}{5} = 0,20$, c'est-à-dire 20 %.

Exercice 4

Une barre métallique s'allonge quand elle chauffe. Sa longueur L (en mm) est une fonction affine de la température T (en °C). On dispose de deux mesures : à $T = 20 \, ^\circ\text{C}$, $L = 2000,0 \, \text{mm}$; à $T = 120 \, ^\circ\text{C}$, $L = 2002,4 \, \text{mm}$.

1. Calculer la pente a de cette fonction affine. Préciser son unité et l'interpréter.
2. Déterminer b , puis écrire l'expression de L en fonction de T .
3. Calculer la longueur de la barre à $200 \, ^\circ\text{C}$.
4. Le montage n'accepte pas une longueur supérieure à $2003,0 \, \text{mm}$. Déterminer la température à ne pas dépasser.

Corrigé

- 1) $a = \frac{2002,4 - 2000,0}{120 - 20} = \frac{2,4}{100} = 0,024 \text{ mm/}^\circ\text{C}$: la barre s'allonge de 0,024 mm par degré.
- 2) $2000,0 = 0,024 \times 20 + b$ donne $b = 2000,0 - 0,48 = 1999,52$. Donc $L = 0,024T + 1999,52$.
- 3) $L(200) = 0,024 \times 200 + 1999,52 = 4,8 + 1999,52 = 2004,32 \text{ mm}$.
- 4) $0,024T + 1999,52 = 2003,0$ donne $0,024T = 3,48$, donc $T = \frac{3,48}{0,024} = 145 \text{ }^\circ\text{C}$.

Exercice 5

On découpe des plaques carrées de côté x (en cm). On note $S(x)$ l'aire de la plaque, en cm^2 .

1. Exprimer $S(x)$, puis calculer $S(2)$, $S(4)$ et $S(6)$.
2. La fonction S est-elle linéaire ? Justifier en comparant $S(4)$ et $2 \times S(2)$.
3. On augmente le côté de 50 %. Par quel coefficient l'aire est-elle multipliée ? De quel pourcentage augmente-t-elle ?
4. Déterminer le côté d'une plaque d'aire 121 cm^2 .

Corrigé

- 1) $S(x) = x^2$, donc $S(2) = 4$, $S(4) = 16$ et $S(6) = 36 \text{ cm}^2$.
- 2) Non : $2 \times S(2) = 8$ alors que $S(4) = 16$. Doubler le côté ne double pas l'aire, il la quadruple : la dépendance est en carré, pas proportionnelle.
- 3) Le côté est multiplié par 1,50, donc l'aire par $1,50^2 = 2,25$: elle augmente de 125 %.
- 4) $x^2 = 121$ donne $x = 11 \text{ cm}$ (le côté étant positif).

Exercice 6

Trois grandeurs ont été relevées pour les mêmes valeurs de x .

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	3	6	9	12
$g(x)$	5	7	9	11	13
$h(x)$	0	2	8	18	32

1. Pour chacune des trois fonctions, indiquer s'il s'agit d'une fonction linéaire, affine (non linéaire) ou carré. Justifier à chaque fois par le test adapté (rapport constant, écarts constants, ou facteur k^2).
2. Donner l'expression de f , de g et de h .
3. Calculer $f(10)$, $g(10)$ et $h(10)$.
4. Laquelle des trois grandeurs croît le plus vite lorsque x devient grand ? Justifier.

Corrigé

1) f : les rapports $\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{12}{4} = 3$ sont constants, et $f(0) = 0$: fonction **linéaire**.

g : les rapports ne sont pas constants ($\frac{7}{1} = 7$ mais $\frac{13}{4} = 3,25$), en revanche les écarts valent 2 à chaque pas et $g(0) = 5 \neq 0$: fonction **affine**.

h : les écarts ne sont pas constants (2, 6, 10, 14). En revanche, quand x passe de 1 à 2 (facteur 2), l'image passe de 2 à 8 (facteur $4 = 2^2$) : fonction **carré**.

2) $f(x) = 3x$; $g(x) = 2x + 5$; $h(x) = 2x^2$ (on vérifie : $2 \times 4^2 = 32$).

3) $f(10) = 30$; $g(10) = 25$; $h(10) = 200$.

4) C'est h : la dépendance en carré finit toujours par dépasser une croissance affine ou linéaire, car multiplier x par k multiplie $h(x)$ par k^2 .

Pour aller plus loin

Exercice 7

Une fonction affine f vérifie $f(2) = 7$ et $f(5) = 16$. On considère par ailleurs la fonction g définie par $g(x) = -2x + 6$.

- Déterminer les coefficients a et b de f , puis écrire son expression.
- Déterminer l'antécédent de 0 par f . Que représente ce nombre pour la droite représentative de f ?
- Résoudre $f(x) = g(x)$, puis donner les coordonnées du point d'intersection des deux droites.
- Sans tracer, dire laquelle des deux fonctions est croissante et laquelle est décroissante.

Corrigé

1) $a = \frac{16 - 7}{5 - 2} = \frac{9}{3} = 3$. Avec $f(2) = 7$: $7 = 3 \times 2 + b$, donc $b = 1$ et $f(x) = 3x + 1$.

2) $3x + 1 = 0$ donne $x = -\frac{1}{3}$. C'est l'abscisse du point où la droite coupe l'axe des abscisses.

3) $3x + 1 = -2x + 6$ donne $5x = 5$, donc $x = 1$, puis $y = 3 \times 1 + 1 = 4$. Point d'intersection : (1 ; 4).

4) f a une pente positive (3) : elle est croissante. g a une pente négative (-2) : elle est décroissante.

Exercice 8

On considère la parabole d'équation $y = x^2$ et la droite d'équation $y = 3x + 4$.

- Vérifier que le point de coordonnées (4 ; 16) appartient aux deux courbes.
- Montrer que chercher les abscisses des points d'intersection revient à résoudre $x^2 - 3x - 4 = 0$.
- Développer $(x - 4)(x + 1)$ et vérifier que l'on retrouve l'expression précédente.
- En déduire les coordonnées des deux points d'intersection.

Corrigé

- 1) Sur la parabole : $4^2 = 16$. ✓ Sur la droite : $3 \times 4 + 4 = 16$. ✓ Le point appartient bien aux deux courbes.
- 2) Un point d'intersection a la même ordonnée sur les deux courbes : $x^2 = 3x + 4$, soit $x^2 - 3x - 4 = 0$.
- 3) $(x - 4)(x + 1) = x^2 + x - 4x - 4 = x^2 - 3x - 4$. ✓
- 4) Un produit est nul si l'un des facteurs est nul : $x = 4$ ou $x = -1$. Pour $x = 4$, $y = 16$; pour $x = -1$, $y = (-1)^2 = 1$. Les points d'intersection sont $(4; 16)$ et $(-1; 1)$.

Exercice 9

La force de résistance de l'air F (en newtons) qui s'oppose au déplacement d'un véhicule est modélisée par $F = k v^2$, où v est la vitesse (en m/s) et k une constante. Un essai donne $F = 15$ N pour $v = 10$ m/s.

1. Déterminer la valeur de k .
2. Calculer la force pour $v = 30$ m/s. Retrouver ce résultat par le facteur k^2 à partir de l'essai initial.
3. Déterminer la vitesse pour laquelle la force atteint 60 N.
4. La vitesse passe de 25 m/s à 50 m/s. La force est-elle doublée ? Justifier.

Corrigé

- 1) $k \times 10^2 = 15$ donne $k = \frac{15}{100} = 0,15$.
- 2) $F = 0,15 \times 30^2 = 0,15 \times 900 = 135$ N. Par le facteur : la vitesse est multipliée par 3, donc la force par $3^2 = 9$, et $9 \times 15 = 135$ N. ✓
- 3) $0,15 v^2 = 60$ donne $v^2 = 400$, donc $v = 20$ m/s.
- 4) Non : la vitesse est multipliée par 2, donc la force par $2^2 = 4$. Elle est quadruplée, pas doublée.

Exercice 10

Un atelier produit des pièces. Le coût total de production de q pièces, en euros, est $C(q) = 12q + 1500$. Chaque pièce est vendue 20 €, ce qui donne une recette $R(q) = 20q$.

1. Préciser la nature de chacune des deux fonctions C et R . Interpréter concrètement les nombres 12, 1500 et 20.
2. Calculer $C(200)$ et $R(200)$. L'atelier est-il bénéficiaire pour 200 pièces ?
3. Le bénéfice est $B(q) = R(q) - C(q)$. Montrer que B est une fonction affine et donner son expression.
4. Déterminer le nombre minimal de pièces à produire pour que l'atelier soit bénéficiaire (seuil de rentabilité), puis calculer le bénéfice réalisé pour 300 pièces.

Corrigé

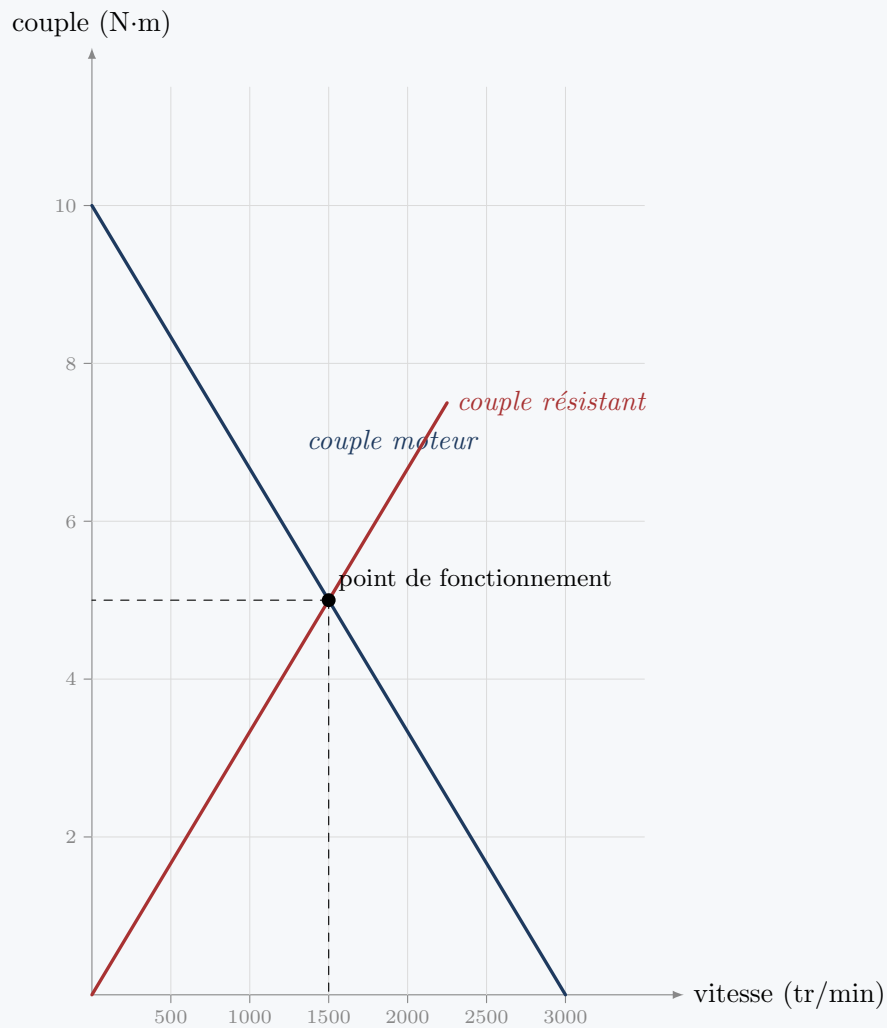
- 1) C est affine (pente 12, ordonnée à l'origine 1 500) et R est linéaire (pente 20). Le nombre 12 est le coût de matière et de main-d'œuvre par pièce, 1 500 € le coût fixe (indépendant de la production), et 20 € le prix de vente unitaire.
- 2) $C(200) = 2\,400 + 1\,500 = 3\,900$ € et $R(200) = 4\,000$ €. La recette dépasse le coût de 100 € : l'atelier est bénéficiaire, mais de peu.
- 3) $B(q) = 20q - (12q + 1\,500) = 8q - 1\,500$: c'est bien une fonction affine, de pente 8 et d'ordonnée à l'origine $-1\,500$.
- 4) $B(q) > 0$ équivaut à $8q > 1\,500$, soit $q > 187,5$: il faut produire au moins 188 pièces. Pour 300 pièces : $B(300) = 2\,400 - 1\,500 = 900$ €.

Activités d'application**Activité 1 • Lecture d'une caractéristique de moteur**

ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : lecture graphique, point de fonctionnement **Lien référentiel** : S2.2 — moteurs électriques, caractéristiques

La courbe ci-dessous représente la caractéristique couple-vitesse d'un moteur électrique. La droite décroissante donne le couple disponible du moteur en fonction de sa vitesse de rotation ; la droite croissante donne le couple résistant exigé par la charge entraînée. Le *point de fonctionnement* est leur intersection.



1. Lire les coordonnées du point de fonctionnement (vitesse en tr/min , couple en $\text{N}\cdot\text{m}$).
2. Quel est le couple disponible quand le moteur est à l'arrêt (vitesse nulle) ? On l'appelle le *couple de démarrage*.
3. Pour quelle vitesse le couple disponible devient-il nul ? On l'appelle la *vitesse à vide*.

Corrigé

1. Point de fonctionnement : vitesse $\approx 1\,500\text{ tr}/\text{min}$, couple $\approx 5\text{ N}\cdot\text{m}$.
2. À vitesse nulle, le couple disponible vaut $10\text{ N}\cdot\text{m}$: c'est le couple de démarrage.
3. Le couple disponible devient nul vers $3\,000\text{ tr}/\text{min}$: c'est la vitesse à vide.

Semaine 6 : Dérivation

Ce chapitre prolonge le cahier principal. Il se compose de deux parties : (a) des exercices classiques supplémentaires (tronc commun aux quatre BTS), (b) des activités d'application en contexte métier plus complètes, qui enchaînent davantage d'étapes.

Exercices classiques (suite)

Ces exercices prolongent les deux exercices du cahier de base. Ils enchaînent plusieurs notions et demandent une étape de raisonnement supplémentaire. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. Les quatre derniers, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 6x + 5$. On rappelle que la tangente à la courbe au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

1. Calculer $f'(x)$, puis $f(4)$ et $f'(4)$.
2. En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse 4, sous la forme $y = ax + b$.
3. Déterminer l'abscisse du point où la tangente est horizontale, puis l'ordonnée de ce point et l'équation de cette tangente.
4. Déterminer l'abscisse du point où la tangente a pour pente 4.

Corrigé

- 1) $f'(x) = 2x - 6$; $f(4) = 16 - 24 + 5 = -3$; $f'(4) = 8 - 6 = 2$.
- 2) $y = 2(x - 4) + (-3) = 2x - 8 - 3$, soit $y = 2x - 11$.
- 3) $2x - 6 = 0$ donne $x = 3$, et $f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$. La tangente horizontale passe par $(3; -4)$: son équation est $y = -4$.
- 4) $2x - 6 = 4$ donne $2x = 10$, donc $x = 5$.

Exercice 2

Un atelier produit q lots de pièces. Le coût total, en euros, est $C(q) = 0,5q^2 + 10q + 200$, et chaque lot est vendu 40 €, ce qui donne une recette $R(q) = 40q$.

1. Calculer $C(20)$ et $R(20)$. L'atelier est-il bénéficiaire pour 20 lots ?
2. Le bénéfice est $B(q) = R(q) - C(q)$. Montrer que $B(q) = -0,5q^2 + 30q - 200$.
3. Calculer $B'(q)$, puis résoudre $B'(q) = 0$.
4. Étudier le signe de B' pour justifier qu'il s'agit d'un maximum, puis donner la production optimale et le bénéfice correspondant.

Corrigé

- 1) $C(20) = 0,5 \times 400 + 200 + 200 = 600$ € et $R(20) = 800$ €. L'atelier est bénéficiaire de 200 €.
- 2) $B(q) = 40q - (0,5q^2 + 10q + 200) = -0,5q^2 + 30q - 200$. ✓ (Vérification : $B(20) = -200 + 600 - 200 = 200$ €, cohérent avec la question 1.)
- 3) $B'(q) = -q + 30$, qui s'annule pour $q = 30$.
- 4) Pour $q < 30$, $B'(q) > 0$; pour $q > 30$, $B'(q) < 0$. Le signe passe de + à - : c'est bien un maximum. La production optimale est de 30 lots, pour un bénéfice de $B(30) = -450 + 900 - 200 = 250$ €.

Exercice 3

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Vérifier, en développant, que $f'(x) = 3(x-3)(x+1)$.
3. Résoudre $f'(x) = 0$, puis déterminer le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x .
4. En déduire les variations de f , puis calculer les deux extremums et préciser leur nature.

Corrigé

- 1) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.
- 2) $3(x-3)(x+1) = 3(x^2 + x - 3x - 3) = 3(x^2 - 2x - 3) = 3x^2 - 6x - 9$. ✓
- 3) Un produit est nul si l'un des facteurs l'est : $x = 3$ ou $x = -1$. Le facteur 3 étant positif, le signe est celui de $(x-3)(x+1)$: positif pour $x < -1$, négatif pour $-1 < x < 3$, positif pour $x > 3$.
- 4) f est croissante sur $] -\infty ; -1]$, décroissante sur $[-1 ; 3]$, puis croissante sur $[3 ; +\infty[$. En $x = -1$, le signe passe de + à - : **maximum** local, $f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$. En $x = 3$, le signe passe de - à + : **minimum** local, $f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22$.

Exercice 4

On cherche une fonction de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ qui vérifie les trois conditions suivantes : $f(0) = 5$, $f'(0) = -4$ et $f'(2) = 0$.

1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b .
2. Traduire chacune des trois conditions par une égalité portant sur a , b ou c .
3. En déduire les valeurs de a , b et c , puis l'expression de f .
4. La condition $f'(2) = 0$ signifie que la tangente est horizontale en $x = 2$. Déterminer s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum, et calculer la valeur correspondante.

Corrigé

- 1) $f'(x) = 2ax + b$.
- 2) $f(0) = c$, donc $c = 5$. $f'(0) = b$, donc $b = -4$. $f'(2) = 4a + b$, donc $4a - 4 = 0$.
- 3) De la dernière égalité : $a = 1$. Donc $f(x) = x^2 - 4x + 5$.
- 4) $f'(x) = 2x - 4$: négative avant $x = 2$, positive après. Le signe passe de - à +, c'est un **minimum**, et $f(2) = 4 - 8 + 5 = 1$.

Exercice 5

Un atelier veut clôturer une aire de stockage rectangulaire le long d'un mur existant. Le mur constitue l'un des quatre côtés, les trois autres sont grillagés. On dispose de 60 m de grillage.

On note x la largeur (le côté perpendiculaire au mur), en mètres.

1. Exprimer la longueur du côté parallèle au mur en fonction de x . Entre quelles valeurs x peut-il varier ?
2. En déduire l'aire $A(x)$ de la zone clôturée, développée sous forme de polynôme.
3. Calculer $A'(x)$ et résoudre $A'(x) = 0$.
4. Justifier qu'il s'agit d'un maximum, puis donner les dimensions de l'aire de stockage la plus grande possible et cette aire.

Corrigé

- 1) Deux côtés mesurent x , il reste $60 - 2x$ pour le côté parallèle au mur. Il faut $x > 0$ et $60 - 2x > 0$, donc x varie entre 0 et 30 mètres.
- 2) $A(x) = x(60 - 2x) = 60x - 2x^2$.
- 3) $A'(x) = 60 - 4x$, qui s'annule pour $x = 15$.
- 4) Pour $x < 15$, $A'(x) > 0$; pour $x > 15$, $A'(x) < 0$: le signe passe de $+$ à $-$, c'est un maximum. La zone mesure alors 15 m de large et $60 - 30 = 30$ m de long, pour une aire de 450 m^2 .

Exercice 6

Soit $f(x) = x^2$. On s'intéresse aux taux de variation moyens de f entre 1 et une valeur b de plus en plus proche de 1.

1. Calculer le taux de variation moyen de f entre 1 et 3, puis entre 1 et 1,5.
2. Calculer de même ce taux entre 1 et 1,1, puis entre 1 et 1,01.
3. Vers quelle valeur ces taux semblent-ils se rapprocher ? Calculer $f'(1)$ et comparer.
4. Interpréter géométriquement : que deviennent les droites dont on vient de calculer les pentes, lorsque b se rapproche de 1 ?

Corrigé

- 1) Entre 1 et 3 : $\frac{9 - 1}{3 - 1} = 4$. Entre 1 et 1,5 : $\frac{2,25 - 1}{0,5} = 2,5$.
- 2) Entre 1 et 1,1 : $\frac{1,21 - 1}{0,1} = 2,1$. Entre 1 et 1,01 : $\frac{1,0201 - 1}{0,01} = 2,01$.
- 3) Les taux se rapprochent de 2. Or $f'(x) = 2x$, donc $f'(1) = 2$: c'est bien la valeur vers laquelle on tendait.
- 4) Chaque taux est la pente de la droite joignant le point d'abscisse 1 au point d'abscisse b . Quand b se rapproche de 1, ces droites se rapprochent de la **tangente** en $x = 1$, dont la pente est précisément $f'(1)$.

_____ Pour aller plus loin _____

Exercice 7

Soit $f(x) = x^3 - 3x$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer les abscisses des points où la tangente à la courbe est horizontale, puis les ordonnées de ces points.
3. Déterminer les abscisses des points où la tangente a pour coefficient directeur 9.
4. Écrire l'équation de chacune de ces deux tangentes de pente 9.

Corrigé

- 1) $f'(x) = 3x^2 - 3$.
- 2) $3x^2 - 3 = 0$ donne $x^2 = 1$, donc $x = 1$ ou $x = -1$. Les points sont $(1; -2)$ car $f(1) = 1 - 3 = -2$, et $(-1; 2)$ car $f(-1) = -1 + 3 = 2$.
- 3) $3x^2 - 3 = 9$ donne $3x^2 = 12$, soit $x^2 = 4$: $x = 2$ ou $x = -2$.
- 4) En $x = 2$: $f(2) = 8 - 6 = 2$, d'où $y = 9(x - 2) + 2 = 9x - 16$. En $x = -2$: $f(-2) = -8 + 6 = -2$, d'où $y = 9(x + 2) - 2 = 9x + 16$. Les deux tangentes sont parallèles, ce qui est cohérent avec une pente commune.

Exercice 8

Dans une plaque carrée de 24 cm de côté, on découpe un carré de côté x à chacun des quatre coins, puis on relève les bords pour former une boîte sans couvercle.

1. Exprimer les dimensions de la boîte en fonction de x , puis son volume $V(x)$. Préciser entre quelles valeurs x peut varier.
2. Développer $V(x)$ sous forme de polynôme.
3. Calculer $V'(x)$, puis vérifier que $V'(x) = 12(x - 4)(x - 12)$. En déduire la seule valeur de x acceptable.
4. Calculer le volume maximal de la boîte.

Corrigé

- 1) La base est un carré de côté $24 - 2x$ et la hauteur vaut x , donc $V(x) = x(24 - 2x)^2$. Il faut $x > 0$ et $24 - 2x > 0$, donc x varie entre 0 et 12 cm.
- 2) $(24 - 2x)^2 = 576 - 96x + 4x^2$, donc $V(x) = 4x^3 - 96x^2 + 576x$.
- 3) $V'(x) = 12x^2 - 192x + 576 = 12(x^2 - 16x + 48)$. Or $12(x - 4)(x - 12) = 12(x^2 - 16x + 48)$. ✓ Donc $V'(x) = 0$ pour $x = 4$ ou $x = 12$; seule $x = 4$ cm est acceptable, car $x = 12$ annulerait la base.
- 4) $V(4) = 4 \times (24 - 8)^2 = 4 \times 256 = 1\,024 \text{ cm}^3$.

Exercice 9

Pendant la charge d'un composant, la charge accumulée, en coulombs, est donnée par $q(t) = -0,05t^3 + 1,5t^2$, où t est le temps en secondes, pour t compris entre 0 et 20 s.

1. Calculer l'intensité $i(t) = q'(t)$, puis $i(10)$.
2. Déterminer les instants auxquels l'intensité est nulle.
3. L'intensité est elle-même une fonction du temps. Calculer $i'(t)$ et résoudre $i'(t) = 0$.
4. En déduire l'instant auquel l'intensité est maximale et la valeur de ce maximum.

Corrigé

- 1) $i(t) = -0,15t^2 + 3t$, donc $i(10) = -15 + 30 = 15 \text{ A}$.
- 2) $-0,15t^2 + 3t = 0$ s'écrit $t(-0,15t + 3) = 0$, donc $t = 0$ ou $t = \frac{3}{0,15} = 20 \text{ s}$: l'intensité est nulle au début et à la fin de la charge.
- 3) $i'(t) = -0,3t + 3$, qui s'annule pour $t = 10 \text{ s}$.
- 4) i' est positive avant $t = 10$ et négative après : l'intensité passe par un maximum à $t = 10 \text{ s}$, et ce maximum vaut $i(10) = 15 \text{ A}$ (calculé à la question 1).

Exercice 10

Un mobile se déplace le long d'un axe. Sa position, en mètres, est $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, avec t en secondes.

1. Calculer $v(t) = x'(t)$, puis vérifier que $v(t) = 3(t-1)(t-3)$.
2. Déterminer les instants auxquels le mobile est à l'arrêt.
3. Étudier le signe de $v(t)$ pour $t \geq 0$, et en déduire dans quel sens le mobile se déplace sur chaque intervalle.
4. Calculer $x(0)$, $x(1)$ et $x(3)$, puis décrire en une phrase le trajet du mobile entre $t = 0$ et $t = 3$ s.

Corrigé

- 1) $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$. Or $3(t-1)(t-3) = 3(t^2 - 4t + 3) = 3t^2 - 12t + 9$. ✓
- 2) $v(t) = 0$ pour $t = 1$ s et $t = 3$ s.
- 3) Le signe est celui de $(t-1)(t-3)$: positif sur $[0; 1[$, négatif sur $]1; 3[$, positif sur $]3; +\infty[$. Le mobile avance, puis recule, puis avance de nouveau.
- 4) $x(0) = 0$ m, $x(1) = 1 - 6 + 9 = 4$ m, $x(3) = 27 - 54 + 27 = 0$ m. Le mobile part de l'origine, avance jusqu'à 4 m en une seconde, puis fait demi-tour et revient exactement à son point de départ à $t = 3$ s.