



Lycée Jean-Baptiste de Baudre
Agen

Parcours de consolidation en mathématiques

Six semaines pour bien démarrer en BTS

Cahier principal

Spécialité CPRP — Conception des Processus de Réalisation de Produits

Version étudiant
(énoncés et espaces de réponse)

De la rentrée aux vacances de la Toussaint

Sommaire

Semaine 1 : Calcul, formules et unités	1
Rappel mathématique	1
Exercices classiques	6
Activités d'application	6
Semaine 2 : Proportionnalité et géométrie de base	9
Rappel mathématique	9
Exercices classiques	14
Activités d'application	15
Semaine 3 : Trigonométrie	18
Rappel mathématique	18
Exercices classiques	23
Activités d'application	24
Semaine 4 : Vecteurs	27
Rappel mathématique	27
Exercices classiques	32
Activités d'application	33
Semaine 5 : Fonctions et lecture graphique	36
Rappel mathématique	36
Exercices classiques	43
Activités d'application	44
Semaine 6 : Dérivation	47
Rappel mathématique	47
Exercices classiques	53
Activités d'application	54
Annexe : prise en main de la calculatrice	57

Semaine 1 : Calcul, formules et unités

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) deux exercices classiques d'application (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte CPRP. Des exercices et des activités supplémentaires figurent dans le *cahier d'approfondissement*.

Rappel mathématique

Cette première semaine consolide les gestes de calcul élémentaires que l'on retrouve dans toutes les activités de BTS : manipuler les fractions, manier les puissances et la notation scientifique, convertir des unités sans se tromper, et isoler une grandeur dans une formule. Chaque paragraphe se termine par un petit exercice d'application immédiate ; les exercices classiques qui suivent le rappel reprennent l'ensemble des notions.

§1. Calcul sur les fractions

■ *En atelier, on assemble deux plaques d'épaisseur $\frac{3}{8}$ pouce et $\frac{1}{4}$ pouce. Quelle est l'épaisseur totale ? Additionner ou simplifier des fractions permet de répondre sans passer par des décimaux qui font perdre en précision.*

Définition – fraction

Une fraction $\frac{a}{b}$ représente le partage de a par b (avec $b \neq 0$). Le nombre a est le *numérateur*, b est le *dénominateur*.

Propriété – simplifier

Si l'on multiplie (ou divise) numérateur et dénominateur par un même nombre non nul, la fraction ne change pas de valeur :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}, \quad k \neq 0.$$

À vous – application 1

Simplifier chaque fraction au maximum.

a) $\frac{12}{18}$ b) $\frac{15}{25}$ c) $\frac{42}{56}$

Réponse :

Propriété – additionner ou soustraire

Pour ajouter (ou retrancher) deux fractions, on les met au **même dénominateur**, puis on additionne (ou retranche) les numérateurs :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db} = \frac{ad + cb}{bd}.$$

À vous – application 2

Calculer, en réduisant au même dénominateur.

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ b) $\frac{5}{6} - \frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$

Réponse :

Propriété – multiplier ou diviser

Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

Pour diviser par une fraction, on multiplie par son inverse :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

À vous – application 3

Calculer, puis simplifier.

a) $\frac{3}{5} \times \frac{10}{9}$ b) $\frac{5}{4} \div \frac{2}{3}$ c) $\frac{7}{8} \div \frac{14}{3}$

Réponse :

Point de vigilance. On additionne avec un dénominateur commun, mais on multiplie *sans* le faire. Confondre les deux est l'erreur la plus fréquente sur les fractions.

§2. Puissances et notation scientifique

| Le diamètre d'un cheveu vaut environ $70\ \mu\text{m}$; celui d'un fil de cuivre en électronique peut descendre à $80\ \text{nm}$. Comparer des grandeurs qui vont du milliard au milliardième demande une écriture unifiée : la notation scientifique.

Définition – puissance d'un nombre

Pour un entier $n \geq 1$, $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$. On pose par convention $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

À vous – application 4

Calculer sans calculatrice.

a) 2^5 b) 10^{-3} c) $(-3)^2$

Réponse :

Propriété – règles de calcul

Pour tous nombres a, b non nuls et entiers m, n :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (a \times b)^n = a^n \times b^n.$$

À vous – application 5

Simplifier en écrivant le résultat sous forme d'une seule puissance de 10.

a) $10^3 \times 10^{-5}$ b) $\frac{10^6}{10^{-2}}$ c) $(10^{-3})^2$

Réponse :

Définition – notation scientifique

Un nombre est écrit en notation scientifique lorsqu'il prend la forme $a \times 10^n$, avec $1 \leq |a| < 10$ et n entier relatif.

À la calculatrice. Voir l'Annexe : prise en main de la calculatrice, §4 (saisie d'une notation scientifique) et §5 (lecture d'un résultat).

À vous – application 6

Écrire chaque nombre en notation scientifique.

- a) 3 200 b) 0,000 034 c) 0,000 25

Réponse :

§3. Conversions d'unités

Une tension de 3,3 V et une résistance de 220 Ω donnent, par la loi d'Ohm, un courant de 15 mA. Trois grandeurs, trois unités : la moindre erreur de conversion fausse le calcul. Les préfixes du Système international donnent une méthode sûre.

Les **préfixes du Système international** permettent d'exprimer une grandeur en multipliant l'unité de base par une puissance de 10 :

Préfixe	Symbole	Facteur	Préfixe	Symbole	Facteur
giga	G	10^9	milli	m	10^{-3}
méga	M	10^6	micro	μ	10^{-6}
kilo	k	10^3	nano	n	10^{-9}

À vous – application 7

Effectuer les conversions suivantes.

- a) 3,3 V en mV.
 b) 20 μ s en s (résultat en notation scientifique).
 c) 470 k Ω en Ω , puis en M Ω .

Réponse :

Méthode – conversion d'une aire ou d'un volume

Pour convertir une aire ou un volume entre deux unités, on convertit d'abord la dimension linéaire correspondante, puis on l'élève à la puissance appropriée.

Aire : 1 mm = 10^{-3} m, donc 1 mm² = $(10^{-3})^2$ m² = 10^{-6} m².

Volume : 1 mm = 10^{-1} cm, donc 1 mm³ = $(10^{-1})^3$ cm³ = 10^{-3} cm³.

Point de vigilance. L'erreur classique est de croire que 1 mm² = 10^{-3} m². C'est faux : l'exposant -3 de la dimension linéaire doit lui aussi être élevé au carré, ce qui donne 10^{-6} m².

À vous – application 8

Convertir en passant explicitement par la dimension linéaire.

- a) 250 cm^2 en m^2 .
- b) 400 mm^2 en cm^2 .
- c) $0,5 \text{ L}$ en cm^3 (rappel : $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$).

Réponse :

§4. Isoler une grandeur dans une formule

La loi d'Ohm $U = RI$ relie tension, résistance et courant. Si l'on connaît U et R et que l'on cherche I , la formule doit être « retournée ». Cette manœuvre, appelée isoler une grandeur, se fait par opérations inverses appliquées symétriquement aux deux membres.

Méthode – isoler une grandeur

On effectue les opérations inverses, dans l'ordre inverse, sur les deux membres de l'égalité, jusqu'à ce que la grandeur cherchée soit seule.

- Pour annuler une addition, on soustrait ; pour annuler une soustraction, on additionne.
- Pour annuler une multiplication, on divise ; pour annuler une division, on multiplie.
- Pour annuler un carré (sur un nombre positif), on prend la racine carrée.

À vous – application 9

Isoler la grandeur demandée. Ces trois cas se règlent en une seule opération.

- a) Dans $U = R \times I$, isoler I .
- b) Dans $V = L \times \ell \times h$, isoler h .
- c) Dans $P = U \times I$, isoler U .

Réponse :

À vous – application 10

Isoler la grandeur demandée. Ces trois cas demandent *deux* opérations successives.

- a) Dans $S = \pi r^2$, isoler r (on suppose $r > 0$).
- b) Dans $y = ax + b$, isoler x .
- c) Dans $E = \frac{1}{2} m v^2$, isoler v (on suppose $v > 0$).

Réponse :

Exercices classiques

Deux exercices d'application pour mettre en œuvre les notions du rappel sur une situation complète. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. D'autres exercices, ainsi que les activités en contexte métier, figurent dans le *cahier d'approfondissement*.

Exercice 1

Calculer les expressions suivantes en menant les calculs jusqu'à la fraction irréductible.

$$\text{a) } \frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{2}{3} \quad \text{b) } \frac{2}{3} \times \frac{9}{4} \div \frac{3}{8} \quad \text{c) } \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}}$$

Réponse :

Exercice 2

Une plaque rectangulaire mesure $L = 120$ mm de long et $\ell = 80$ mm de large.

1. Calculer son aire S en mm^2 .
2. Exprimer S en cm^2 , puis en m^2 .
3. Un revêtement coûte 18 € par m^2 . Calculer le coût du revêtement pour cette plaque.

Réponse :

Activités d'application

Activité 1 • Vitesse de coupe en tournage

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : application d'une formule, isoler une grandeur
paramètres de coupe

Lien référentiel : S7.2.2 —

En tournage, on relie la vitesse de coupe V_c au diamètre D de la pièce et à la fréquence de rotation n de la broche par la formule :

$$V_c = \frac{\pi \times D \times n}{1000},$$

avec V_c en m/min, D en mm et n en tr/min.

On tourne un arbre de diamètre $D = 80$ mm à une fréquence $n = 500$ tr/min.

1. Calculer la vitesse de coupe V_c .
2. Pour le même diamètre, à quelle fréquence n faut-il tourner pour obtenir $V_c = 150$ m/min ? (isoler n)

Réponse :

Activité 2 • Vitesse d'avance en fraisage

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : application d'une formule, isoler une grandeur **Lien référentiel :** S7.2.2 — paramètres de coupe

En fraisage, la vitesse d'avance V_f se calcule à partir de l'avance par dent f_z , du nombre de dents Z de la fraise et de la fréquence de rotation n :

$$V_f = f_z \times Z \times n,$$

avec V_f en mm/min, f_z en mm/dent et n en tr/min.

On fraise avec une fraise de $Z = 4$ dents, une avance $f_z = 0,1$ mm/dent et $n = 1\,500$ tr/min.

1. Calculer la vitesse d'avance V_f .
2. Pour la même fraise et la même fréquence, quelle avance f_z faut-il pour atteindre $V_f = 1\,200$ mm/min ? (isoler f_z)

Réponse :

Activité 3 • Section du copeau

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : application d'une formule, isoler une grandeur **Lien référentiel :** S7.2.2 — paramètres de coupe (section du copeau)

En tournage, la section du copeau enlevé à chaque tour vaut $S = a_p \times f$, où a_p est la profondeur de passe (en mm) et f l'avance par tour (en mm/tr).

On usine avec $a_p = 2$ mm et $f = 0,3$ mm/tr.

1. Calculer la section S du copeau (en mm²).
2. Pour la même avance f , à quelle profondeur de passe a_p faut-il aller pour doubler la section du copeau ? (isoler a_p)

Réponse :

Activité 4 • Rugosité obtenue en tournage

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : application d'une formule, isoler une grandeur, conversion mm/μm **Lien référentiel :** S3 — états de surface

En tournage, la rugosité totale R_t dépend de l'avance f et du rayon de bec R_ϵ de la plaquette :

$$R_t = \frac{f^2}{8 \times R_\epsilon},$$

avec f en mm/tr et R_ϵ en mm. Le résultat est alors en millimètres. Les rayons de bec courants sont 0,2 ; 0,4 ; 0,8 et 1,2 mm.

1. On tourne avec $f = 0,2$ mm/tr et une plaquette de rayon de bec $R_\epsilon = 0,8$ mm. Calculer R_t en millimètres, puis l'exprimer en micromètres.
2. Le bureau d'études impose $R_t = 3,2$ μm avec la même plaquette. Isoler f dans la formule, puis calculer l'avance à programmer (arrondir au centième).

Réponse :

Activité 5 • Unités de temps d'une gamme d'usinage

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : conversions d'unités de temps **Lien référentiel :** S9.1.1 — temps de production

Les temps de fabrication s'expriment en heures, minutes et secondes, mais les gammes d'usinage les donnent le plus souvent en minutes décimales, au centième de minute près. Un centième de minute vaut 0,6 s.

1. Un temps unitaire vaut 2,45 min. L'exprimer en minutes et secondes.
2. Une série de 240 pièces est lancée à raison de 0,85 min par pièce. Calculer le temps total en minutes, puis l'exprimer en heures et minutes.

Réponse :

Semaine 2 : Proportionnalité et géométrie de base

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) deux exercices classiques d'application (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte CPRP. Des exercices et des activités supplémentaires figurent dans le *cahier d'approfondissement*.

Rappel mathématique

Cette deuxième semaine consolide les outils qui interviennent dans presque tous les calculs métier : reconnaître une situation de proportionnalité et l'exploiter, manier les pourcentages dans les deux sens, lire une échelle, et appliquer correctement les formules d'aires et de volumes usuels. Chaque notion est suivie d'un petit exercice d'application immédiate ; les exercices classiques qui suivent le rappel reprennent l'ensemble des notions.

§1. Proportionnalité

■ *Un devis matière annonce 34 € pour 20 L de fluide de coupe. Combien pour 35 L ? Reconnaître une situation proportionnelle, c'est pouvoir répondre à toutes les questions de ce type avec un seul nombre : le coefficient.*

Définition – deux grandeurs proportionnelles

Deux grandeurs x et y sont *proportionnelles* si le rapport $\frac{y}{x}$ est constant. Ce rapport est appelé **coefficient de proportionnalité**, noté k : $y = k \times x$.

À vous – application 1

Dans chaque cas, calculer le coefficient de proportionnalité, puis répondre à la question posée.

- Le prix à payer est proportionnel au volume servi : 20 L coûtent 34 €. Calculer k (en €/L), puis le prix de 35 L.
- Une machine produit 120 pièces en 8 h. Calculer k (en pièces/h), puis la production en 5 h.
- Un câble de 12 m a une masse de 3,6 kg. Calculer k (en kg/m), puis la masse de 30 m de câble.

Réponse :

Propriété – produit en croix

Si quatre nombres a, b, c, d (avec b et d non nuls) vérifient $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $a \times d = b \times c$. On peut isoler n'importe laquelle des quatre grandeurs si l'on connaît les trois autres.

À vous – application 2

Calculer la grandeur inconnue par un produit en croix.

a) $\frac{a}{3} = \frac{20}{12}$.

b) $\frac{7}{x} = \frac{21}{15}$.

- c) Un véhicule parcourt 180 km en 2 h à vitesse constante. Quelle distance d parcourt-il en 3 h ?

Réponse :

Point de vigilance. Avant d'appliquer le produit en croix, il faut s'assurer que la situation est bien proportionnelle. Par exemple, l'âge et la taille d'un enfant ne le sont pas, ni un tarif qui comporte un forfait fixe.

§2. Pourcentages

| *Le prix d'une matière première augmente de 8%, puis le fournisseur consent une remise de 5%. Le prix final est-il inférieur ou supérieur au prix de départ ? Les pourcentages se combinent en multipliant des coefficients, pas en ajoutant des taux.*

Définition – pourcentage

Un pourcentage $p\%$ représente la fraction $\frac{p}{100}$. Calculer $p\%$ d'une quantité Q , c'est calculer $\frac{p}{100} \times Q$.

À vous – application 3

Calculer les proportions demandées.

- a) 30 % de 250 €.

- b) 12 % de 75 kg.

- c) Sur un lot de 400 pièces, 18 sont rebutées. Quel pourcentage du lot cela représente-t-il ?

Réponse :

Méthode – augmentation et diminution

Augmenter une quantité de $p\%$ revient à la multiplier par le coefficient $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Diminuer une quantité de $p\%$ revient à la multiplier par le coefficient $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

Pour enchaîner deux évolutions, on multiplie les coefficients entre eux.

À vous – application 4

Utiliser un coefficient multiplicateur.

- Un prix de 80 € subit une hausse de 15 % : calculer le nouveau prix.
- Une remise de 20 % est appliquée sur 80 € : calculer le prix soldé.
- Un prix de 200 € augmente de 10 %, puis baisse de 10 % : calculer le prix final.

Réponse :

Point de vigilance. Une hausse de 20 % suivie d'une baisse de 20 % ne ramène pas au prix initial : $100 \times 1,20 \times 0,80 = 96$, pas 100. Les taux ne s'additionnent pas, ce sont les coefficients qui se multiplient.

§3. Échelles

Sur un dessin de définition, une pièce mesure 84 mm alors qu'elle en fait 2 100 en réalité. L'échelle est la traduction chiffrée de ce rapport : elle permet de passer du plan à l'atelier, et de l'atelier au plan.

Définition – échelle

Sur un plan ou une carte, l'échelle est le rapport entre une longueur sur le plan et la longueur réelle correspondante, exprimées dans la même unité :

$$\text{échelle} = \frac{\text{longueur sur le plan}}{\text{longueur réelle}}.$$

Une échelle s'écrit souvent sous la forme $1 : n$ (un sur n). Avec une échelle $1 : 50$, 1 cm sur le plan représente 50 cm en réalité ; ou encore, 1 mm sur le plan représente 50 mm.

À vous – application 5

Passer du plan à la réalité.

- Sur un plan à l'échelle $1 : 100$, un mur mesure 4 cm. Calculer sa longueur réelle, en mètres.
- Sur un plan à l'échelle $1 : 20$, une pièce mesure 75 mm. Calculer sa longueur réelle, en millimètres puis en centimètres.
- Sur un plan, une pièce mesure 84 mm pour une longueur réelle de 2 100 mm. Déterminer l'échelle du plan sous la forme $1 : n$.

Réponse :

Méthode – choisir le bon sens de calcul

Les deux longueurs doivent d'abord être exprimées **dans la même unité**. Ensuite :

- du plan vers la réalité, on **multiplie** par n ;
- de la réalité vers le plan, on **divise** par n .

Une échelle $1 : n$ avec $n > 1$ est une réduction ; une échelle $n : 1$ est un agrandissement (utile pour les petites pièces).

À vous – application 6

Passer de la réalité au plan.

- Une pièce mesure réellement 240 mm. Quelle est sa longueur sur un plan à l'échelle $1 : 2$?
- Un local mesure 12 m de long. Quelle est sa longueur, en centimètres, sur un plan à l'échelle $1 : 200$?
- Une pièce d'horlogerie de 3 mm est dessinée à l'échelle $10 : 1$. Quelle est sa longueur sur le dessin ?

Réponse :

§4. Aires usuelles

Chiffrer un traitement de surface, un débit de tôle ou une quantité de peinture suppose de savoir calculer une aire, y compris lorsque la pièce n'est pas d'un seul tenant : perçages, découpes, évidements.

Propriété – formules d'aires

Rectangle de longueur L et largeur ℓ : $S = L \times \ell$.

Triangle de base b et hauteur h : $S = \frac{b \times h}{2}$.

Disque de rayon r : $S = \pi r^2$. Circonférence (périmètre) : $\mathcal{P} = 2\pi r$.

À vous – application 7

Calculer les aires demandées (valeur exacte, puis valeur approchée au dixième lorsqu'il y a un π).

- Disque de rayon $r = 5$ cm.
- Triangle de base $b = 9$ cm et de hauteur $h = 4$ cm.
- Disque de *diamètre* $D = 12$ mm.

Réponse :

Méthode – aire d'une surface composée

On décompose la figure en surfaces usuelles, puis on **ajoute** les parties présentes et on **re-tranche** les parties évidées :

$$S_{\text{utile}} = S_{\text{brute}} - S_{\text{évidée}}.$$

Toutes les aires doivent être exprimées dans la même unité avant d'être additionnées.

À vous – application 8

Calculer l'aire de chaque surface composée.

- Une plaque rectangulaire de 20 cm × 15 cm percée d'un trou circulaire de rayon 3 cm.
- Une plaque carrée de côté 10 cm dont on a découpé un triangle de base 10 cm et de hauteur 4 cm.
- Une plaque rectangulaire de 30 cm × 20 cm percée de deux trous circulaires de diamètre 4 cm.

Réponse :

Conversions d'aires. Pour passer d'une unité d'aire à une autre, on convertit la dimension linéaire correspondante et on élève au carré (voir semaine 1, §3).

§5. Volumes usuels

Un devis matière part du volume de la pièce, une capacité de cuve part du volume du réservoir. Et la question se pose souvent à l'envers : quelle hauteur, quel rayon donner pour atteindre le volume voulu ?

Propriété – formules de volumes

Parallélépipède rectangle de longueur L , largeur ℓ , hauteur h : $V = L \times \ell \times h$.

Cylindre de rayon r et hauteur h : $V = \pi r^2 h$.

Sphère de rayon r : $V = \frac{4}{3} \pi r^3$.

À vous – application 9

Calculer les volumes demandés (valeur exacte, puis valeur approchée au dixième lorsqu'il y a un π).

- Cylindre de rayon $r = 2$ cm et de hauteur $h = 10$ cm.
- Parallélépipède rectangle de dimensions 8 cm × 5 cm × 3 cm.
- Sphère de rayon $r = 3$ cm.

Réponse :

Méthode – retrouver une dimension à partir du volume

On applique la technique de la semaine 1 (§4) : isoler la grandeur cherchée par opérations inverses.

$$V = L \ell h \Rightarrow h = \frac{V}{L \ell} \quad \text{et} \quad V = \pi r^2 h \Rightarrow r^2 = \frac{V}{\pi h} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}.$$

À vous – application 10

Retrouver la dimension manquante.

- Un parallélépipède rectangle de base $10 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$ a un volume $V = 300 \text{ cm}^3$. Calculer sa hauteur h .
- Un cylindre de rayon $r = 5 \text{ cm}$ a un volume $V = 200 \pi \text{ cm}^3$. Calculer sa hauteur h .
- Un cylindre de hauteur $h = 4 \text{ cm}$ a un volume $V = 64 \pi \text{ cm}^3$. Calculer son rayon r .

Réponse :

Conversions de volumes. Pour passer d'une unité de volume à une autre, on convertit la dimension linéaire et on élève au cube (voir semaine 1, §3). On retiendra aussi $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$.

Exercices classiques

Deux exercices d'application pour mettre en œuvre les notions du rappel sur une situation complète. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. D'autres exercices, ainsi que les activités en contexte métier, figurent dans le *cahier d'approfondissement*.

Exercice 1

Une plaque rectangulaire mesure 250 mm de long et 160 mm de large. On y perce 4 trous circulaires identiques, de diamètre 20 mm .

- Calculer l'aire brute de la plaque, en mm^2 .
- Calculer l'aire d'un trou, puis l'aire totale des quatre trous (valeur approchée au dixième).
- En déduire l'aire de matière restante, en mm^2 , puis en cm^2 .

Réponse :

Exercice 2

Une cuve cylindrique a un rayon $r = 40$ cm et une hauteur $h = 1,20$ m.

1. Exprimer la hauteur en centimètres, puis calculer le volume de la cuve en cm^3 (valeur approchée à l'unité).
2. Convertir ce volume en litres (rappel : $1 \text{ L} = 1\,000 \text{ cm}^3$). Arrondir au dixième.
3. La cuve est remplie à 80 % de sa capacité. Quel volume de liquide contient-elle ?

Réponse :

Activités d'application

Activité 1 • Temps d'usinage

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : application d'une formule, isoler une grandeur, conversion min/s **Lien référentiel :** S9.1.1 — temps de production

Le temps d'usinage est lié à la longueur à parcourir et à la vitesse d'avance par $t = \frac{L}{V_f}$.

Une fraise progresse à $V_f = 500$ mm/min pour usiner une longueur $L = 200$ mm.

1. Calculer le temps d'usinage t , d'abord en minutes, puis en secondes.
2. Pour la même longueur, à quelle vitesse V_f faut-il fraiser pour terminer en 0,2 min ? (isoler V_f)

Réponse :

Activité 2 • Avance de perçage et diamètre du foret

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : proportionnalité, coefficient **Lien référentiel :** S3 — conditions de coupe

Le choix des conditions de coupe passe par des abaques. Pour le perçage d'un acier courant, le fabricant donne l'avance f (en mm/tr) en fonction du diamètre D du foret (en mm).

D (mm)	5	8	10	16
f (mm/tr)	0,10	0,16	0,20	0,32

1. Montrer que f est proportionnelle à D , et déterminer le coefficient de proportionnalité.
2. En déduire l'avance à programmer pour un foret de diamètre 12 mm.

Réponse :

Activité 3 • Proportionnalité entre vitesse de coupe et fréquence

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : proportionnalité, tableau de valeurs **Lien référentiel :** S7.2.2 — paramètres de coupe

Pour un diamètre D fixé, la relation $V_c = \frac{\pi \times D \times n}{1000}$ devient une relation de proportionnalité entre V_c et n : doubler n double V_c . On tourne un arbre de diamètre $D = 100$ mm.

1. Compléter le tableau de V_c pour $n = 0, 500, 1000, 1500, 2000$ tr/min (résultats arrondis au dixième).
2. Calculer le rapport V_c/n pour les valeurs non nulles. Que constate-t-on ?
3. Quelle fréquence n donne $V_c = 314,2$ m/min ?

Réponse :

Activité 4 • Aire d'une surface à fraiser

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : formule d'aire, conversion $\text{mm}^2 \rightarrow \text{cm}^2$ **Lien référentiel :** lecture de plan, géométrie d'une pièce

On surface une plaque rectangulaire de longueur $L = 200$ mm et de largeur $l = 80$ mm.

1. Donner la formule de l'aire d'un rectangle, puis calculer l'aire S de la plaque (en mm^2).
2. Exprimer 1 mm en centimètres sous la forme d'une puissance de 10, puis en déduire à quoi est égal 1 mm^2 en cm^2 .
3. En déduire S en cm^2 .

Réponse :

Activité 5 • Lecture d'un plan d'usinage à l'échelle

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : proportionnalité, échelle **Lien référentiel :** S2.4 — lecture de plan

Un plan d'usinage est tracé à l'échelle **1:5** : une longueur réelle est cinq fois la longueur correspondante sur le dessin.

1. Écrire la relation entre la longueur réelle et la longueur sur le dessin.
2. Une longueur mesurée de 60 mm sur le plan correspond à quelle longueur réelle ?
3. Une pièce mesure réellement 400 mm. Quelle est sa longueur sur le plan ?

Réponse :

Semaine 3 : Trigonométrie

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) deux exercices classiques d'application (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte CPRP. Des exercices et des activités supplémentaires figurent dans le *cahier d'approfondissement*.

Rappel mathématique

Cette semaine consolide les outils de la trigonométrie du triangle rectangle : théorème de Pythagore, et relations entre les côtés et les angles via sinus, cosinus et tangente. Ces outils sont mobilisés dès qu'on travaille sur une géométrie inclinée, une force décomposée, ou un signal périodique. Chaque notion est suivie d'un petit exercice d'application immédiate ; les exercices classiques qui suivent le rappel reprennent l'ensemble des notions.

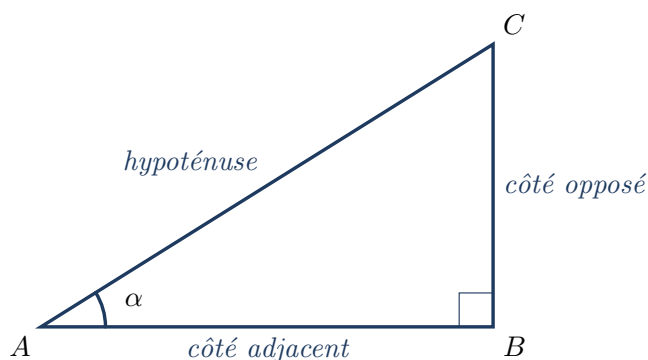
§1. Triangle rectangle : vocabulaire

Une rampe, un pan de toiture, un chanfrein, une force inclinée : dans tous ces cas, on retrouve le même triangle rectangle. Encore faut-il nommer correctement ses côtés, car c'est ce qui décide de la formule à employer.

Définition – hypoténuse, côté opposé, côté adjacent

Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit est appelé **hypoténuse** ; c'est toujours le côté le plus long. Les deux autres côtés forment les *côtés de l'angle droit*. Pour un angle aigu α donné du triangle, on distingue :

- le **côté opposé** à α : le côté qui ne touche pas α ;
- le **côté adjacent** à α : le côté de l'angle droit qui touche α .



Point de vigilance. « Opposé » et « adjacent » ne sont pas des propriétés du triangle : elles dépendent de l'angle choisi. Le côté adjacent à α est le côté opposé à l'autre angle aigu. L'hypoténuse, elle, ne change jamais.

À vous – application 1

Un triangle ABC est rectangle en A . Ses côtés sont $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

- Quel côté est l'hypoténuse ? Justifier en une phrase.
- Pour l'angle $\widehat{B}$, nommer le côté opposé et le côté adjacent.
- Reprendre la question b) pour l'angle $\widehat{C}$, et comparer avec la réponse précédente.

Réponse :

§2. Théorème de Pythagore

✓ Vérifier qu'un châssis est bien d'équerre, calculer une diagonale de découpe, retrouver un entraxe entre deux perçages : Pythagore est l'outil de contrôle géométrique le plus utilisé en atelier.

Propriété – théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés :

$$(\text{hypoténuse})^2 = (\text{côté 1})^2 + (\text{côté 2})^2.$$

À vous – application 2

Calculer la longueur de l'hypoténuse (arrondir au dixième si nécessaire).

- Côtés de l'angle droit $a = 3$ et $b = 4$.
- Côtés de l'angle droit $a = 6$ cm et $b = 8$ cm.
- Côtés de l'angle droit $a = 5$ cm et $b = 7$ cm.

Réponse :

Méthode – isoler un côté de l'angle droit

Si l'on connaît l'hypoténuse c et un côté a , on isole l'autre côté en appliquant les opérations inverses (voir semaine 1, §4) :

$$c^2 = a^2 + b^2 \implies b^2 = c^2 - a^2 \implies b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

On soustrait toujours le carré du *petit* côté à celui de l'hypoténuse : une différence négative signale une erreur d'identification.

À vous – application 3

Calculer le côté manquant.

- a) Hypoténuse $c = 13$ cm, côté $a = 5$ cm.
- b) Hypoténuse $c = 25$ mm, côté $a = 24$ mm.
- c) Hypoténuse $c = 10$ cm, côté $a = 4$ cm (arrondir au dixième).

Réponse :

Propriété – réciproque du théorème de Pythagore

Réciproquement, si dans un triangle le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres, alors ce triangle est rectangle. C'est ce qui permet de **contrôler une équerre** : un triangle de côtés 3, 4 et 5 (ou tout multiple) est rectangle.

À vous – application 4

Ces triangles sont-ils rectangles ? Justifier par un calcul.

- a) Côtés 9 cm, 12 cm, 15 cm.
- b) Côtés 6 cm, 8 cm, 11 cm.
- c) Côtés 20 mm, 21 mm, 29 mm.

Réponse :

§3. Sinus, cosinus, tangente

Pythagore relie trois longueurs, mais reste muet sur les angles. Dès qu'une inclinaison entre en jeu — pente d'une rampe, angle d'un pan de toit, direction d'une force — il faut relier les côtés aux angles.

Définition – rapports trigonométriques

Pour un angle aigu α d'un triangle rectangle :

$$\sin \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$

Moyen mnémotechnique : SOH-CAH-TOA. *Sinus = Opposé / Hypoténuse, Cosinus = Adjacent / Hypoténuse, Tangente = Opposé / Adjacent.*

À vous – application 5

Un triangle rectangle a pour côté opposé à α 3 cm, pour côté adjacent 4 cm et pour hypoténuse 5 cm.

- a) Calculer $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ et $\tan \alpha$ sous forme décimale.

- b) Dans un triangle rectangle d'hypoténuse 13 cm dont le côté opposé à β mesure 5 cm et le côté adjacent 12 cm, calculer $\sin \beta$ et $\tan \beta$.
- c) Expliquer pourquoi $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ sont toujours inférieurs à 1, alors que $\tan \alpha$ peut dépasser 1.

Réponse :

Méthode – choisir le bon rapport

On repère ce que l'on *connaît* et ce que l'on *cherche*, puis on prend le rapport qui contient ces deux côtés :

- opposé et hypoténuse $\rightarrow$ sinus ;
- adjacent et hypoténuse $\rightarrow$ cosinus ;
- opposé et adjacent $\rightarrow$ tangente.

Si l'inconnue est *au numérateur*, on multiplie ; si elle est *au dénominateur*, on divise.

À vous – application 6

Calculer la longueur demandée (arrondir au dixième).

- a) L'hypoténuse vaut 10 cm et $\alpha = 30^\circ$: calculer le côté opposé à α .
- b) Le côté adjacent à $\alpha = 40^\circ$ vaut 8 cm : calculer l'hypoténuse.
- c) Le côté adjacent à $\alpha = 25^\circ$ vaut 12 cm : calculer le côté opposé.

Réponse :

§4. Valeurs particulières

Quelques angles reviennent sans cesse sur les plans : 30° , 45° , 60° . En connaître les valeurs exactes permet de contrôler d'un coup d'œil un résultat sorti de la calculatrice.

Propriété – angles remarquables

Angle α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

On retient au minimum $\sin 30^\circ = 0,5$ et $\cos 60^\circ = 0,5$: les autres se retrouvent à la calculatrice.

À la calculatrice. Avant tout calcul de sinus, cosinus ou tangente, vérifier que la calculatrice est bien en mode **degré** (voir l'*Annexe : prise en main de la calculatrice*, §1).

À vous – application 7

Donner les valeurs suivantes, puis vérifier à la calculatrice en mode degré.

- a) $\sin 30^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\tan 45^\circ$.
- b) $\cos 30^\circ$ et $\sin 60^\circ$: valeur exacte, puis valeur approchée au millièm.
- c) Que valent $\sin 0^\circ$ et $\sin 90^\circ$?

Réponse :

Propriété – angles complémentaires

Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus α et β vérifient $\alpha + \beta = 90^\circ$: ils sont *complémentaires*. Comme le côté opposé à l'un est le côté adjacent à l'autre, il en découle

$$\sin \beta = \cos \alpha \quad \text{et} \quad \cos \beta = \sin \alpha.$$

À vous – application 8

Utiliser la relation entre angles complémentaires.

- a) Dans un triangle rectangle, un angle aigu vaut 37° . Combien vaut l'autre ?
- b) On sait que $\sin 20^\circ \approx 0,342$. En déduire $\cos 70^\circ$ sans calculatrice.
- c) Vérifier avec le tableau ci-dessus que $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$, et expliquer pourquoi.

Réponse :

§5. Trouver un angle à partir d'un rapport

Sur le terrain, on mesure des longueurs, pas des angles. Déduire l'inclinaison d'une rampe ou l'angle d'un perçage à partir de deux cotes, c'est le calcul inverse du précédent.

Méthode – retrouver un angle (trigonométrie inverse)

Si l'on connaît la valeur d'un rapport trigonométrique et qu'on cherche l'angle correspondant, on utilise les fonctions *inverses* :

$$\alpha = \sin^{-1}(\dots) \quad \text{ou} \quad \alpha = \cos^{-1}(\dots) \quad \text{ou} \quad \alpha = \tan^{-1}(\dots).$$

On les note aussi arcsin, arccos, arctan. La calculatrice y accède par **SHIFT** puis la touche correspondante.

À vous – application 9

Déterminer l'angle α (arrondir au dixième de degré).

- a) $\tan \alpha = 0,75$.
- b) $\sin \alpha = 0,6$.
- c) Le côté opposé à α mesure 7 cm et le côté adjacent 24 cm.

Réponse :

Point de vigilance. L'unité du résultat dépend du mode actif. En mode degré, $\tan^{-1}(1) = 45^\circ$; en mode radian, $\tan^{-1}(1) \approx 0,7854$. **Toujours vérifier le mode** (voir Annexe Calculatrice §8).

Méthode – résoudre entièrement un triangle rectangle

« Résoudre » un triangle rectangle, c'est en déterminer les trois côtés et les deux angles aigus.

À partir de deux données (deux côtés, ou un côté et un angle) :

1. on complète les côtés manquants par Pythagore ou par un rapport trigonométrique ;
2. on obtient un angle aigu par trigonométrie inverse ;
3. on obtient le second angle par complémentarité : $\beta = 90^\circ - \alpha$.

À vous – application 10

Un triangle rectangle a une hypoténuse de 15 cm et un côté opposé à α de 9 cm.

- a) Calculer le troisième côté.
- b) Calculer l'angle α (arrondir au degré).
- c) En déduire le second angle aigu β .

Réponse :

Exercices classiques

Deux exercices d'application pour mettre en œuvre les notions du rappel sur une situation complète. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. D'autres exercices, ainsi que les activités en contexte métier, figurent dans le *cahier d'approfondissement*.

Exercice 1

Un châssis rectangulaire doit mesurer 60 cm sur 80 cm. Pour vérifier qu'il est bien d'équerre, on mesure sa diagonale.

1. Calculer la longueur théorique de la diagonale.
2. En atelier, on mesure 99,2 cm. Le châssis est-il d'équerre ? Justifier.
3. Calculer l'écart entre la mesure et la valeur théorique, en pourcentage de cette dernière.

Réponse :

Exercice 2

Sur une plaque, deux perçages sont décalés de 45 mm horizontalement et de 28 mm verticalement.

1. Calculer l'entraxe, c'est-à-dire la distance entre les deux centres.
2. Calculer l'angle que fait la droite joignant les deux centres avec l'horizontale (arrondir au dixième de degré).
3. On souhaite conserver le même entraxe, mais avec un angle de 45° . Calculer les nouveaux décalages horizontal et vertical (arrondir au dixième de millimètre).

Réponse :

Activités d'application

Activité 1 • Diagonale d'une face rectangulaire

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : théorème de Pythagore **Lien référentiel :** S6.1 — contrôle géométrique d'une pièce

On contrôle, sur une pièce usinée, la diagonale d'une face rectangulaire de dimensions 30 mm $\times$ 40 mm.

1. Énoncer la relation de Pythagore dans un triangle rectangle d'hypoténuse c et de côtés a et b .
2. Calculer la longueur de la diagonale de la face.

Réponse :

Activité 2 • Profondeur d'une rainure en V

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : tangente, isoler une grandeur **Lien référentiel :** S7.2.2 — géométrie d'outil et de rainure

Une rainure en V usinée a un angle au sommet de 90° (donc un demi-angle de 45°) et une largeur en surface de 40 mm. La profondeur h et la demi-largeur (20 mm) forment un triangle rectangle dont l'angle vaut 45° .

1. Exprimer $\tan 45^\circ$ en fonction de la demi-largeur et de la profondeur h .
2. En déduire la profondeur h . (isoler h)

Réponse :

Activité 3 • Longueur d'un outil incliné pour atteindre une profondeur donnée

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : sinus, isoler une grandeur **Lien référentiel :** S5.3 — géométrie de l'outil et du porte-outil

Un outil de coupe progresse selon un axe incliné à $\alpha = 30^\circ$ par rapport à l'horizontale. Pour atteindre une profondeur verticale $h = 10$ mm, l'outil doit parcourir une distance L le long de son axe.

1. Exprimer $\sin \alpha$ en fonction de la profondeur h et de la longueur L .
2. En déduire L . (isoler L)

Réponse :

Activité 4 • Valeur instantanée d'une tension sinusoïdale

PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : sinus **Lien référentiel :** S15 — Électricité (grandeurs alternatives)

Une tension alternative suit le modèle $u = U_{\max} \sin \theta$, où $U_{\max}$ est la tension de crête et θ l'angle (en degrés). On donne $U_{\max} = 325$ V.

1. Calculer la valeur de la tension u pour $\theta = 30^\circ$.
2. Calculer u pour $\theta = 90^\circ$. Que représente cette valeur ?

Réponse :

Activité 5 • Longueur de perçage à programmer

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : tangente, isoler une grandeur **Lien référentiel :** S6 — programmation en commande numérique

Sur un plan, la profondeur cotée d'un trou borgne est celle de sa *partie cylindrique*, notée ℓ . Mais en commande numérique c'est la **pointe** du foret qui est pilotée : il faut donc programmer une longueur ℓ_p plus grande, augmentée de la hauteur de pointe h .

Les angles de pointe des forets vont de 116° à 120° , la plupart valant 118° . La pointe étant un cône, le demi-angle au sommet vaut 59° et

$$\tan 59^\circ = \frac{D/2}{h} \quad \text{donc} \quad h = \frac{D/2}{\tan 59^\circ}.$$

1. Un trou borgne de profondeur cylindrique $\ell = 25$ mm est percé au foret de diamètre $D = 10$ mm à 118° . Calculer la hauteur de pointe h , puis la longueur ℓ_p à programmer (arrondir au dixième).
2. Le même foret doit maintenant traverser une pièce de 18 mm d'épaisseur. Quelle profondeur minimale programmer pour que le foret débouche complètement ?

Réponse :

Semaine 4 : Vecteurs

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) deux exercices classiques d'application (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte CPRP. Des exercices et des activités supplémentaires figurent dans le *cahier d'approfondissement*.

Rappel mathématique

Cette semaine consolide les outils sur les vecteurs : représentation graphique, composantes, addition, et calcul de la norme. Ces outils sont mobilisés dès qu'on travaille sur des forces, des vitesses, des courants ou des grandeurs alternatives représentés vectoriellement. Chaque notion est suivie d'un petit exercice d'application immédiate ; les exercices classiques qui suivent le rappel reprennent l'ensemble des notions.

§1. Vecteur, composantes

Dire qu'un câble tire à 400 N ne suffit pas : il faut savoir dans quelle direction et dans quel sens. Une force, une vitesse, un déplacement ne se résument pas à un nombre, et c'est précisément ce que le vecteur permet de décrire.

Définition – vecteur

Un vecteur, noté $\vec{u}$ ou $\overrightarrow{AB}$, est caractérisé par trois éléments : une **direction** (la droite qui le porte), un **sens** (de A vers B), et une **norme** (sa longueur), notée $\|\vec{u}\|$ ou $\|\overrightarrow{AB}\|$.

À vous – application 1

Répondre en s'appuyant sur les trois caractéristiques ci-dessus.

- Deux forces de même intensité tirent l'une vers la droite, l'autre vers la gauche. Qu'ont-elles en commun, et qu'est-ce qui les distingue ?
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont-ils la même norme ? La même direction ? Le même sens ?
- Une grandeur physique est décrite par le seul nombre 75 kg. Est-ce un vecteur ? Justifier.

Réponse :

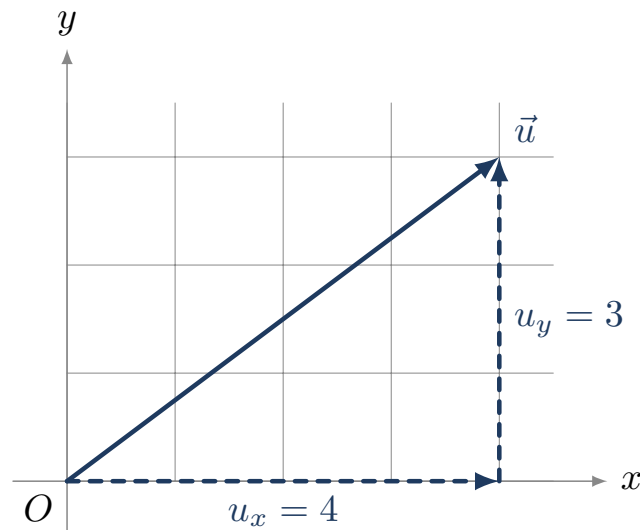
Définition – composantes d'un vecteur

Dans un repère orthonormé du plan, un vecteur $\vec{u}$ est décrit par ses *composantes* $(x; y)$, où x est son déplacement horizontal et y son déplacement vertical. Pour deux points $A(x_A; y_A)$

et $B(x_B; y_B)$:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) .$$

On calcule toujours *l'arrivée moins le départ*.



À vous – application 2

Calculer les composantes des vecteurs demandés.

- $A(1; 2)$ et $B(4; 6)$: calculer $\overrightarrow{AB}$.
- Pour les mêmes points, calculer $\overrightarrow{BA}$ et comparer avec le résultat précédent.
- $C(-2; 5)$ et $D(3; 1)$: calculer $\overrightarrow{CD}$.

Réponse :

§2. Norme d'un vecteur

Une fois la force décomposée en horizontal et vertical, il faut souvent revenir à son intensité réelle : c'est la norme. Le calcul n'est rien d'autre que le théorème de Pythagore de la semaine 3.

Propriété – norme

La norme d'un vecteur de composantes $(x; y)$ vaut

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} .$$

C'est la longueur du vecteur, calculée par le théorème de Pythagore. Une norme est toujours positive, même si les composantes sont négatives : elles sont élevées au carré.

À vous – application 3

Calculer les normes demandées.

- a) $\vec{u} = (3; 4)$.
- b) $\vec{v} = (5; 12)$.
- c) $\vec{w} = (-6; 8)$.

Réponse :

Méthode – distance entre deux points

La distance entre deux points A et B est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$: on calcule d'abord les composantes, puis la norme.

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

À vous – application 4

Calculer la distance entre les deux points (arrondir au centième si nécessaire).

- a) $A(2; 3)$ et $B(8; 11)$.
- b) $C(0; 0)$ et $D(-5; 12)$.
- c) $E(1; 4)$ et $F(4; 6)$.

Réponse :

§3. Somme de vecteurs

Quand plusieurs forces s'appliquent au même point, elles ne s'additionnent pas comme des nombres : c'est leur somme vectorielle qui donne la résultante, et c'est elle qui décide du mouvement.

Propriété – somme par composantes

Pour additionner deux vecteurs, on additionne les composantes de même nature :

$$\vec{u}_1 = (x_1; y_1), \quad \vec{u}_2 = (x_2; y_2), \quad \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (x_1 + x_2; y_1 + y_2).$$

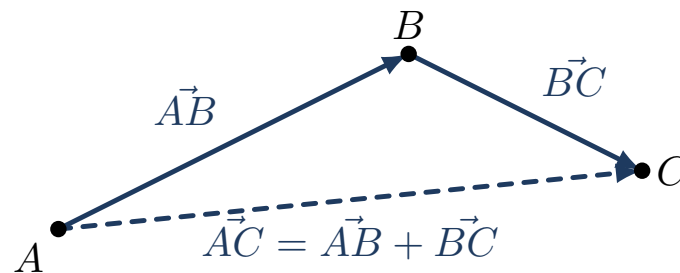
À vous – application 5

Calculer la somme, puis sa norme.

- a) $\vec{u}_1 = (3; 0)$ et $\vec{u}_2 = (0; 4)$.
- b) $\vec{u} = (2; 5)$ et $\vec{v} = (3; -1)$.
- c) $\vec{u} = (-4; 7)$ et $\vec{v} = (4; -2)$.

Réponse :

Représentation graphique. On place les vecteurs bout à bout (origine du second sur l'extrémité du premier) ; la somme va de l'origine du premier à l'extrémité du second. C'est la *relation de Chasles* : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.



À vous – application 6

On donne $A(1; 1)$, $B(4; 5)$ et $C(9; 5)$.

- Calculer les composantes de $\vec{AB}$ et de $\vec{BC}$.
- Calculer les composantes de $\vec{AC}$.
- Vérifier la relation de Chasles $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

Réponse :

Propriété – vecteur opposé et différence

L'*opposé* du vecteur $\vec{u} = (x; y)$ est le vecteur $-\vec{u} = (-x; -y)$: même direction, même norme, sens contraire. La différence s'obtient en ajoutant l'opposé :

$$\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = (x_1 - x_2; y_1 - y_2) .$$

À vous – application 7

On donne $\vec{u}_1 = (2; 3)$ et $\vec{u}_2 = (5; -1)$.

- Calculer les composantes de $-\vec{u}_2$.
- Calculer $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$, puis sa norme.
- Calculer $\vec{u}_2 - \vec{u}_1$ et sa norme, puis comparer avec la question b).

Réponse :

§4. Direction d'un vecteur

Un plan indique rarement des composantes : il donne une intensité et un angle. Savoir passer des composantes à l'angle, et de l'angle aux composantes, est le va-et-vient permanent du calcul de forces.

Méthode – angle d'un vecteur avec l'axe horizontal

Pour un vecteur $\vec{u} = (x; y)$ avec $x > 0$, l'angle θ qu'il fait avec l'axe horizontal se calcule par

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, \quad \text{donc} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right).$$

À la calculatrice. L'angle est obtenu en mode degré avec la fonction $\tan^{-1}$ (voir Annexe Calculatrice §8).

À vous – application 8

Calculer l'angle θ avec l'axe horizontal (arrondir au dixième de degré).

- $\vec{u} = (3; 4)$.
- $\vec{v} = (6; 8)$. Comparer avec la question a) et expliquer.
- $\vec{w} = (5; 12)$.

Réponse :

Méthode – des données polaires aux composantes

Réciproquement, si l'on connaît la norme $\|\vec{u}\|$ et l'angle θ avec l'horizontale, on retrouve les composantes par la trigonométrie du triangle rectangle (semaine 3, §3) :

$$x = \|\vec{u}\| \times \cos \theta \quad \text{et} \quad y = \|\vec{u}\| \times \sin \theta.$$

C'est ce calcul que l'on appelle **décomposer** un vecteur.

À vous – application 9

Calculer les composantes (arrondir au centième).

- $\|\vec{u}\| = 10$ et $\theta = 30^\circ$.
- $\|\vec{v}\| = 200$ et $\theta = 60^\circ$.
- $\|\vec{w}\| = 50$ et $\theta = 0^\circ$. Commenter le résultat.

Réponse :

§5. Vecteurs colinéaires

Deux câbles qui tirent dans le même axe, un poids et une réaction verticale : quand tout se passe sur une seule direction, le calcul vectoriel se réduit à une addition de nombres signés.

Propriété – résultante de vecteurs colinéaires

Deux vecteurs sont *colinéaires* lorsqu'ils ont la même direction. Leur résultante se calcule alors sur cette seule direction :

- de **même sens** : les normes s'ajoutent, le sens est conservé ;
- de **sens opposés** : les normes se retranchent, et le sens est celui du plus grand.

En pratique, on oriente un axe, on affecte un signe + ou – à chaque vecteur selon son sens, puis on additionne.

À vous – application 10

Déterminer la valeur et le sens de la résultante.

- Une force de 50 N vers le bas et une force de 30 N vers le haut.
- Deux forces de 120 N et 80 N, toutes deux vers la droite.
- Une force de 45 N vers la gauche et une force de 45 N vers la droite.

Réponse :

Exercices classiques

Deux exercices d'application pour mettre en œuvre les notions du rappel sur une situation complète. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. D'autres exercices, ainsi que les activités en contexte métier, figurent dans le *cahier d'approfondissement*.

Exercice 1

Un chariot automatisé se déplace dans un atelier repéré en mètres. Il part de $A(1; 1)$, passe par $B(4; 5)$, puis s'arrête en $C(9; 5)$.

- Calculer les composantes de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{BC}$, puis la longueur de chacun des deux tronçons.
- Calculer les composantes de $\overrightarrow{AC}$ et vérifier la relation de Chasles.
- Calculer la distance directe entre le départ et l'arrivée (arrondir au centième).

Réponse :

Exercice 2

Un objet est soumis à deux forces perpendiculaires : $\vec{F}_1$, horizontale, d'intensité 12 N, et $\vec{F}_2$, verticale, d'intensité 5 N.

1. Écrire les composantes de $\vec{F}_1$, de $\vec{F}_2$, puis de la résultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.
2. Calculer l'intensité de la résultante.
3. Calculer l'angle que fait $\vec{R}$ avec l'horizontale (arrondir au dixième de degré).

Réponse :

Activités d'application

Activité 1 • Résultante des composantes d'un effort de coupe

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : somme de vecteurs, norme **Lien référentiel :** S7.2.2 — efforts de coupe

Au cours d'une opération de tournage, l'effort exercé sur la pointe de l'outil se décompose, dans le plan de la coupe, en une composante tangentielle F_c (effort principal) et une composante d'avance F_f . On les donne par leurs composantes : $\vec{F}_c = (300; 0)$ N et $\vec{F}_f = (0; 400)$ N.

1. Donner les composantes de la résultante $\vec{R} = \vec{F}_c + \vec{F}_f$.
2. Calculer la norme de $\vec{R}$.

Réponse :

Activité 2 • Moment de serrage d'un mandrin

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : produit, isoler une grandeur **Lien référentiel :** S5.3 — porte-outils et mandrins, S3.4 — moment d'une force

Le moment d'une force par rapport à un axe est $M = F \times d$, où d est le bras de levier. On serre un mandrin en exerçant une force $F = 150 \text{ N}$ sur une clé, à une distance $d = 0,2 \text{ m}$ de l'axe du mandrin.

1. Calculer le moment de serrage M (en $\text{N}\cdot\text{m}$).
2. On veut un moment $M = 45 \text{ N}\cdot\text{m}$ avec la même force. Quel bras de levier d faut-il ? (isoler d)

Réponse :

Activité 3 • Vecteur défini par deux points (programmation d'une trajectoire)

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : composantes, norme **Lien référentiel :** S2.4 — lecture de plan, S8.3 — CFAO

Sur un plan d'usinage, deux points sont repérés par leurs coordonnées (en mm) : un point de référence $A(10; 20)$ et un point à percer $B(40; 60)$.

1. Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (rappel : $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$).
2. Calculer la norme de $\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire la distance entre les deux points.

Réponse :

Activité 4 • Vecteur vitesse d'avance d'un outil deux axes

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : norme, direction **Lien référentiel :** S11.1 — cinématiques de machines, machines multiaxes

Sur une machine à commande numérique, un outil avance simultanément suivant deux axes. Sa vitesse a pour composantes $v_x = 600 \text{ mm/min}$ et $v_y = 800 \text{ mm/min}$.

1. Calculer la norme du vecteur vitesse d'avance (la vitesse résultante de l'outil).
2. Déterminer l'angle θ que fait le vecteur avec l'axe X ($\tan \theta = v_y/v_x$).

Réponse :

Activité 5 • Poussée d'Archimède : forces verticales opposées PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : somme de vecteurs colinéaires, signe **Lien référentiel :** S15 — statique des fluides

Un objet plongé dans l'eau subit deux forces verticales opposées : son poids $P = 50 \text{ N}$ (vers le bas) et la poussée d'Archimède $F_A = 30 \text{ N}$ (vers le haut). La force résultante est leur somme vectorielle ; comme elles sont opposées, on soustrait leurs valeurs.

1. Calculer la valeur de la force résultante et préciser son sens.
2. En déduire si l'objet coule ou remonte.

Réponse :

Activité 6 • Décalage d'origine en commande numérique
MÉCANIQUE

Outil réinvesti : composantes signées, somme de vecteurs **Lien référentiel :** S6 — programmation en commande numérique

Une machine à commande numérique possède une origine machine O_M et son repère $(O_M; X; Y; Z)$, situé en haut, à droite, au fond de l'espace de travail. Le programme, lui, est écrit dans un repère pièce $(O_P; X; Y; Z)$ posé sur la pièce.

Pour que la machine sache où se trouve la pièce, on lui introduit les coordonnées de O_P dans le repère machine : c'est le **décalage d'origine**, autrement dit le vecteur $\overrightarrow{O_M O_P}$, avec un signe sur chacun des trois axes.

1. Depuis O_M , le point O_P se trouve à 320 mm vers la gauche selon X , à 210 mm vers l'avant selon Y , et 145 mm plus bas selon Z . Écrire les composantes de $\overrightarrow{O_M O_P}$, en millimètres, en tenant compte des signes.
2. Pour une seconde pièce, le montage est décalé de 80 mm supplémentaires vers la gauche, les deux autres axes restant inchangés. Donner les composantes du nouveau décalage d'origine.

Réponse :

Semaine 5 : Fonctions et lecture graphique

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) deux exercices classiques d'application (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte CPRP. Des exercices et des activités supplémentaires figurent dans le *cahier d'approfondissement*.

Rappel mathématique

Cette semaine consolide les outils pour décrire et interpréter une dépendance entre deux grandeurs : fonction linéaire, fonction affine, fonction carré, et lecture graphique. Ces outils permettent de modéliser un grand nombre de situations métier (loi d'Ohm, dilatation, débit, étalonnage de capteur). Chaque notion est suivie d'un petit exercice d'application immédiate ; les exercices classiques qui suivent le rappel reprennent l'ensemble des notions.

§1. Notion de fonction

■ *Un capteur de température délivre une tension : à chaque température correspond une valeur, et une seule. C'est exactement ce que décrit une fonction, et c'est pourquoi tout le vocabulaire qui suit sert à lire une fiche technique.*

Définition – fonction

Une fonction f associe à chaque valeur x (la variable) une unique valeur $f(x)$ (l'image de x). La représentation graphique de f est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$.

À vous – application 1

Calculer les images demandées.

- a) Pour $f(x) = 2x + 1$: calculer $f(0)$, $f(3)$ et $f(-2)$.
- b) Pour $g(x) = x^2 - 3$: calculer $g(0)$, $g(4)$ et $g(-1)$.
- c) Pour $h(t) = 50 - 4t$: calculer $h(0)$, $h(5)$ et $h(12,5)$.

Réponse :

Définition – image et antécédent

Le nombre $f(a)$ est l'**image** de a par f . Réciproquement, si $f(a) = c$, on dit que a est un **antécédent** de c par f . Chercher un antécédent revient à résoudre l'équation $f(x) = c$; il peut y avoir une solution, plusieurs, ou aucune.

À vous – application 2

Déterminer les antécédents demandés en résolvant une équation.

- a) Pour $f(x) = 2x + 1$: déterminer l'antécédent de 9.
- b) Pour $h(t) = 50 - 4t$: déterminer l'antécédent de 18.
- c) Pour $u(x) = x^2$: déterminer les antécédents de 25.

Réponse :

§2. Fonction linéaire

La loi d'Ohm $U = RI$, le prix d'un fluide au litre, la masse d'un câble au mètre : dès qu'une grandeur est proportionnelle à une autre, elle s'écrit sous la forme $f(x) = kx$ et se lit sur une droite passant par l'origine.

Définition – fonction linéaire

Une fonction linéaire est de la forme $f(x) = kx$, où k est un coefficient constant. Sa représentation graphique est une droite passant par l'origine.

À vous – application 3

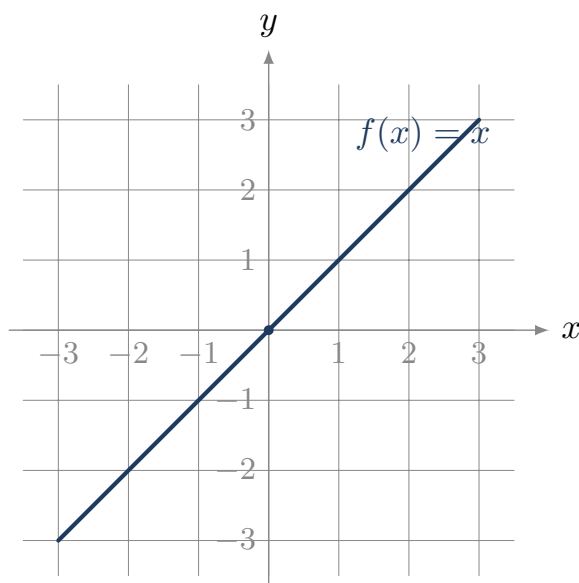
Reconnaître et exploiter une fonction linéaire.

- a) Pour $f(x) = 4x$: calculer $f(0)$, $f(2)$ et $f(5)$.
- b) Parmi $f(x) = 3x$, $g(x) = 3x + 2$ et $h(x) = x^2$, laquelle est linéaire ? Justifier.
- c) Une fonction linéaire vérifie $f(4) = 10$. Déterminer son coefficient k , puis calculer $f(6)$.

Réponse :

Propriété – proportionnalité

Une fonction linéaire $f(x) = kx$ traduit une situation de **proportionnalité** entre x et $f(x)$, de coefficient k . Sur la droite, k est le *coefficient directeur* (la pente).



À vous – application 4

Traduire une situation métier par une fonction linéaire.

- Loi d'Ohm : pour une résistance $R = 47 \, \Omega$, exprimer U en fonction de I , puis calculer U pour $I = 0,2 \, \text{A}$.
- Un câble a une masse de $0,3 \, \text{kg}$ par mètre. Exprimer la masse m en fonction de la longueur L , puis calculer m pour $L = 24 \, \text{m}$.
- Le tableau ci-dessous relève-t-il d'une fonction linéaire ? Si oui, donner son expression.

x	2	5	8	10
$f(x)$	7	17,5	28	35

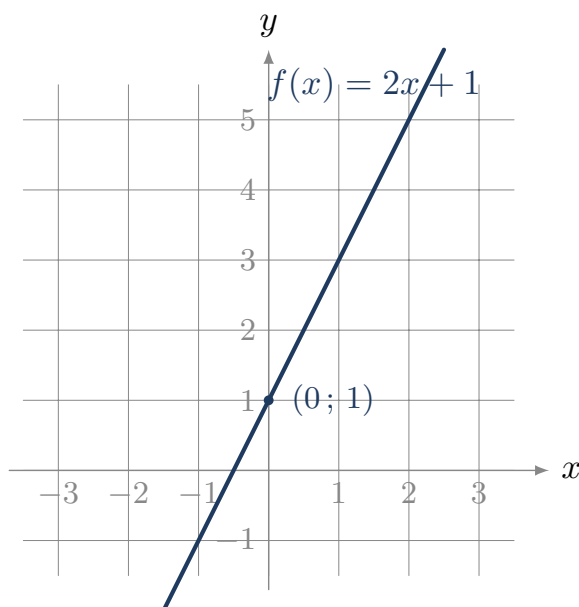
Réponse :

§3. Fonction affine

| Un atelier facture une mise en route fixe, puis un prix par pièce. Le total n'est plus proportionnel au nombre de pièces : c'est le terme constant qui fait toute la différence entre fonction linéaire et fonction affine.

Définition – fonction affine

Une fonction affine est de la forme $f(x) = ax + b$, où a est le coefficient directeur (pente) et b l'ordonnée à l'origine. Sa représentation graphique est une droite, qui passe par le point $(0; b)$. Si $b = 0$, la fonction est linéaire ; on retrouve le cas précédent.



À vous – application 5

Identifier pente et ordonnée à l'origine.

- Pour $f(x) = 3x + 2$: calculer $f(0)$ et $f(1)$, puis donner la pente et le point par lequel la droite coupe l'axe des ordonnées.
- Pour $g(x) = -2x + 7$: donner a et b , puis calculer $g(0)$ et $g(3)$. La fonction est-elle croissante ou décroissante ?
- Un atelier facture 15 € de mise en route plus 0,40 € par pièce. Exprimer le prix P en fonction du nombre n de pièces, puis calculer P pour $n = 50$.

Réponse :

Méthode – calculer la pente entre deux points

Pour une droite passant par les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ (avec $x_A \neq x_B$), la pente vaut

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

On obtient ensuite b en reportant les coordonnées de l'un des deux points dans $y = ax + b$.

À vous – application 6

Déterminer l'expression de la fonction affine dont la droite passe par les deux points donnés.

- $A(0; 3)$ et $B(4; 11)$.
- $A(1; 5)$ et $B(3; 11)$.
- $A(2; 9)$ et $B(6; 1)$.

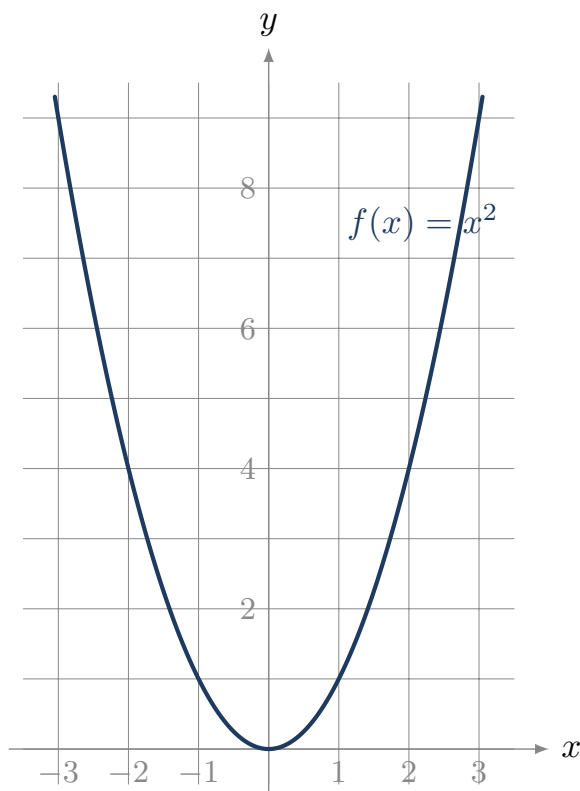
Réponse :

§4. Fonction carré

La puissance dissipée dans une résistance vaut $P = RI^2$: passer de 2 A à 4 A ne double pas l'échauffement, il le quadruple. Reconnaître une dépendance en carré évite ce genre de mauvaise surprise.

Définition – fonction carré

La fonction carré est définie par $f(x) = x^2$. Pour $a \neq 0$, on appelle parfois ainsi toute fonction de la forme $f(x) = ax^2$.



À vous – application 7

Calculer des images par une fonction carré.

- Pour $f(x) = x^2$: calculer $f(2)$, $f(4)$ et $f(-3)$.
- Pour $g(x) = 5x^2$: calculer $g(1)$, $g(3)$ et $g(4)$.
- Pour $P(I) = 12I^2$ (puissance en watts, intensité en ampères) : calculer $P(2)$ et $P(2,5)$.

Réponse :

Propriété – effet du carré

Si l'on multiplie la variable par 2, l'image est multipliée par $2^2 = 4$. Plus généralement, multiplier la variable par k multiplie l'image par k^2 .

À vous – application 8

Utiliser le facteur k^2 sans refaire tout le calcul.

- Pour $f(x) = x^2$, on sait que $f(2) = 4$. En déduire $f(4)$ par le facteur, puis vérifier par le calcul direct.
- Pour $g(x) = 3x^2$, on sait que $g(5) = 75$. En déduire $g(15)$.
- Dans $P = RI^2$, l'intensité augmente de 10 %. Par quel coefficient la puissance est-elle multipliée ? De quel pourcentage augmente-t-elle ?

Réponse :

Cas métier. La puissance dissipée par effet Joule $P = RI^2$ est une fonction carré de l'intensité : doubler I quadruple la puissance. C'est ce qui impose de dimensionner les sections de conducteurs sur l'intensité maximale, et non sur l'intensité moyenne.

§5. Lecture graphique

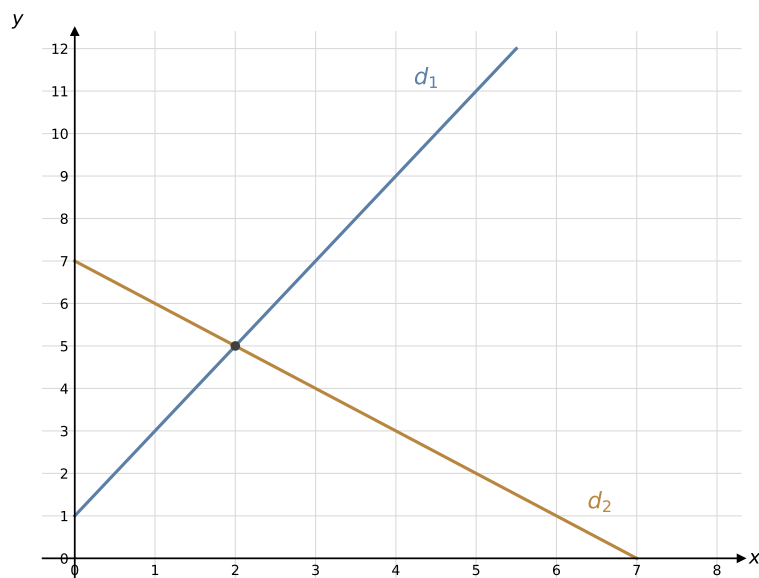
Un relevé d'essai, une caractéristique de composant, une courbe d'étalonnage : la donnée arrive souvent sous forme de courbe et non de formule. Savoir en extraire une valeur, un antécédent ou un point de fonctionnement fait partie du métier.

Méthode – lire une courbe

Pour exploiter une représentation graphique :

- **Image d'une valeur** : pour lire $f(a)$, on repère a sur l'axe des abscisses, on monte verticalement jusqu'à la courbe, puis horizontalement jusqu'à l'axe des ordonnées.
- **Antécédent** : pour trouver les valeurs x telles que $f(x) = c$, on repère c sur l'axe des ordonnées, on va horizontalement jusqu'à la courbe, puis verticalement jusqu'à l'axe des abscisses.
- **Point d'intersection** : entre deux courbes, le point d'intersection donne une valeur de x pour laquelle les deux fonctions prennent la même valeur.

Dans tout ce paragraphe, on utilise le graphique ci-dessous. Les droites d_1 et d_2 représentent respectivement deux fonctions affines f_1 et f_2 .



À vous – application 9

Lire le graphique ci-dessus (aucun calcul n'est demandé).

- Lire $f_1(3)$, puis $f_2(3)$.
- Lire l'antécédent de 9 par f_1 , puis l'antécédent de 4 par f_2 .
- Lire les coordonnées du point d'intersection des deux droites.

Réponse :

Méthode – retrouver l'équation d'une droite lue sur un graphique

On lit d'abord b : c'est l'ordonnée du point où la droite coupe l'axe des ordonnées. On lit ensuite la pente a en repérant deux points à coordonnées entières et en appliquant $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. On peut aussi lire directement : quand on avance de 1 vers la droite, a est ce que l'on monte (ou descend, si a est négatif).

À vous – application 10

Toujours à partir du même graphique.

- Déterminer l'expression de f_1 .
- Déterminer l'expression de f_2 .
- Retrouver par le calcul les coordonnées du point d'intersection, et vérifier l'accord avec la lecture graphique.

Réponse :

Point de vigilance. Une lecture graphique donne une valeur *approchée* : elle est fiable quand le point tombe sur un nœud du quadrillage, beaucoup moins entre deux graduations. Dès que la précision compte, on repasse par le calcul.

Exercices classiques

Deux exercices d'application pour mettre en œuvre les notions du rappel sur une situation complète. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. D'autres exercices, ainsi que les activités en contexte métier, figurent dans le *cahier d'approfondissement*.

Exercice 1

On relève la tension U (en V) aux bornes d'un conducteur ohmique pour différentes intensités I (en A).

I (A)	0,1	0,2	0,4	0,5
U (V)	2	4	8	10

1. Montrer que U est une fonction linéaire de I , et déterminer son coefficient. Que représente-t-il physiquement, et dans quelle unité ?
2. Calculer la tension obtenue pour $I = 0,35$ A.
3. Déterminer l'intensité nécessaire pour obtenir $U = 15$ V. Exprimer le résultat en A, puis en mA.

Réponse :

Exercice 2

Une cuve de 600 L se vide à débit constant. Le volume restant, en litres, après t minutes est donné par $V(t) = 600 - 25t$.

1. Calculer $V(0)$ et $V(8)$, puis interpréter concrètement les nombres 600 et -25 de la formule.
2. Déterminer l'instant auquel il reste 150 L dans la cuve.
3. Déterminer l'instant auquel la cuve est vide.

Réponse :

Activités d'application

Activité 1 • Position d'un axe d'usinage (fonction affine)

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : fonction affine, isoler une grandeur **Lien référentiel :** S11.1 — machines à commande numérique

Un outil progresse en mode continu sur un axe à vitesse d'avance constante. Sa position suit la loi $L(t) = L_0 + V_f \times t$, où L_0 est la position initiale et V_f la vitesse d'avance. On donne $L_0 = 200$ mm et $V_f = 300$ mm/min.

1. Calculer la position L de l'outil à l'instant $t = 4$ min.
2. À quel instant t l'outil atteint-il la position $L = 2000$ mm ? (isoler t)

Réponse :

Activité 2 • Raideur d'un porte-pièce (fonction linéaire)

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : proportionnalité, fonction linéaire **Lien référentiel :** S5.2 — conception des porte-pièces

Dans sa zone de fonctionnement, la déformation d'un porte-pièce est proportionnelle à l'effort de serrage : $F = k \times x$, où k est sa raideur et x la déformation (en mm). On donne $k = 50$ N/mm.

1. Calculer l'effort F pour une déformation $x = 4$ mm.
2. Pour un effort $F = 300$ N, calculer la déformation x . (isoler x)

Réponse :

Activité 3 • Aire d'une section carrée (fonction carré)

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : fonction carré, tableau de valeurs **Lien référentiel** : S2.4 — lecture de plan, sections de brut

On considère des bruts à section carrée de différents côtés. L'aire de la section dépend du côté a selon $S = a^2$.

1. Compléter le tableau de S pour $a = 0, 10, 20, 30, 40$ mm.
2. Si l'on double le côté a , par combien l'aire S est-elle multipliée ? Justifier par la forme de la fonction.

Réponse :

Activité 4 • Caractéristique d'un conducteur ohmique (fonction linéaire) PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : proportionnalité, lecture de tableau **Lien référentiel** : S15 — Électricité (tension, intensité)

On mesure la tension U aux bornes d'une résistance pour différentes intensités I :

I (A)	0	1	2	3
U (V)	0	5	10	15

1. Calculer le rapport U/I pour chaque mesure (sauf la première). Que constate-t-on ?
2. En déduire la valeur de la résistance R (la pente de la droite $U = RI$).

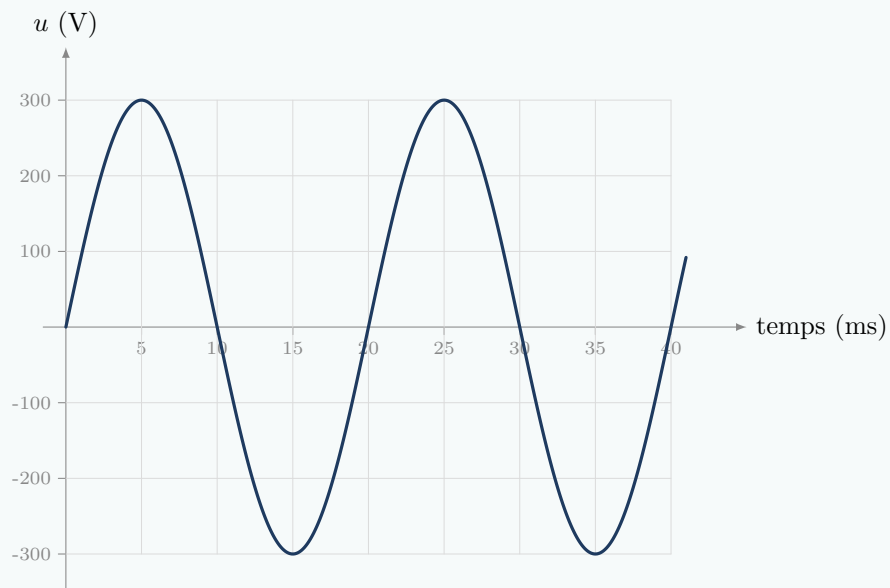
Réponse :

Activité 5 • Lecture d'un oscillogramme (signal sinusoïdal)

PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : lecture graphique, période et fréquence **Lien référentiel** : S15 — Électricité (grandeurs alternatives)

L'oscillogramme ci-dessous représente une tension alternative en fonction du temps.



1. Lire l'amplitude (valeur de crête) de la tension.
2. Lire la durée d'un cycle complet (la période T), puis calculer la fréquence f (rappel : $f = 1/T$).

Réponse :

Semaine 6 : Dérivation

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) deux exercices classiques d'application (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte CPRP. Des exercices et des activités supplémentaires figurent dans le *cahier d'approfondissement*.

Rappel mathématique

Cette semaine consolide la notion de dérivée d'une fonction et son interprétation comme taux de variation. La dérivation est l'outil de la première année de BTS pour étudier les variations, identifier les extremums et modéliser des grandeurs qui évoluent (vitesse, courant, débit). Chaque notion est suivie d'un petit exercice d'application immédiate ; les exercices classiques qui suivent le rappel reprennent l'ensemble des notions.

§1. Taux de variation et nombre dérivé

Un véhicule parcourt 120 km en 2 heures : sa vitesse moyenne est de 60 km/h, mais son compteur n'a presque jamais affiché exactement 60. Passer de la moyenne sur un intervalle à la valeur à un instant donné, c'est tout l'objet de la dérivée.

Définition – taux de variation moyen

Le *taux de variation moyen* d'une fonction f entre deux valeurs a et b (avec $a \neq b$) est

$$\tau = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

C'est la pente de la droite qui joint les deux points de la courbe d'abscisses a et b : on retrouve exactement le calcul de pente de la semaine 5 (§3).

À vous – application 1

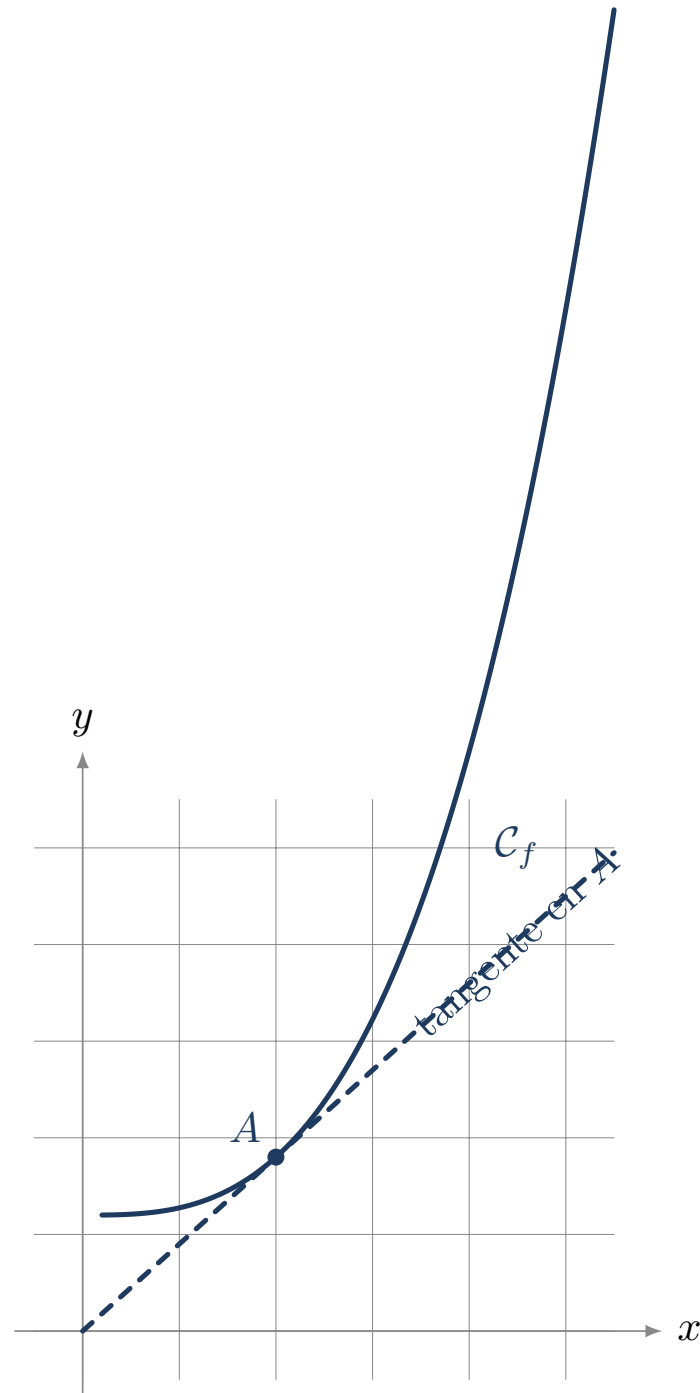
Calculer les taux de variation moyens demandés.

- Pour $f(x) = x^2$, entre $a = 1$ et $b = 3$.
- Pour $f(x) = x^2$, entre $a = 1$ et $b = 1,5$.
- Un mobile est en $x(0) = 0$ m et en $x(4) = 24$ m (t en secondes). Calculer sa vitesse moyenne entre ces deux instants.

Réponse :

Définition – nombre dérivé

Le *nombre dérivé* d'une fonction f en un point d'abscisse a , noté $f'(a)$, est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe représentative de f au point $(a; f(a))$. C'est aussi le *taux de variation instantané* de f en a : il indique à quelle vitesse f change autour de cette valeur.

**À vous – application 2**

Déterminer un nombre dérivé à partir d'une tangente.

- a) La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 passe par les points $(2; 3)$ et $(5; 12)$.
En déduire $f'(2)$.

- b) La tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1 passe par $(1; 6)$ et $(4; 0)$. En déduire $g'(1)$, puis dire si g croît ou décroît autour de 1.
- c) La tangente à la courbe de h au point d'abscisse 5 est horizontale. Que vaut $h'(5)$?

Réponse :

§2. Fonction dérivée

Recalculer une pente point par point serait interminable. On établit donc, une fois pour toutes, une fonction qui donne la pente en tout point : c'est elle que l'on manipule ensuite dans tous les calculs de BTS.

Définition – fonction dérivée

La fonction dérivée de f , notée f' , associe à chaque x son nombre dérivé $f'(x)$ (lorsqu'il existe).

Propriété – dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
k (constante)	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	$n x^{n-1}$

À vous – application 3

Dériver en utilisant le tableau ci-dessus.

- a) $f(x) = x^5$.
- b) $f(x) = x^4$.
- c) $f(x) = 12$, puis $g(x) = x$.

Réponse :

Méthode – du nombre dérivé à la fonction dérivée

Pour obtenir un nombre dérivé $f'(a)$, on calcule d'abord la fonction f' , puis on y remplace x par a . C'est toujours dans cet ordre : on dérive, ensuite on remplace.

À vous – application 4

Dériver, puis calculer le nombre dérivé demandé et l'interpréter.

- $f(x) = x^4$: calculer $f'(2)$.
- $f(x) = x^3$: calculer $f'(2)$ et $f'(-1)$.
- $f(x) = x^2$: calculer $f'(0)$. Que peut-on en dire de la tangente en ce point ?

Réponse :

§3. Règles de dérivation

Les modèles rencontrés en BTS (coût, position, charge, débit) sont presque toujours des polynômes. Trois règles suffisent alors à les dériver entièrement, sans jamais revenir à la définition.

Propriété – opérations sur les dérivées

Pour deux fonctions u et v et un réel k :

$$(k u)' = k u', \quad (u + v)' = u' + v', \quad (u - v)' = u' - v'.$$

Ces règles permettent de dériver tous les *polynômes*.

À vous – application 5

Dériver les fonctions suivantes.

- $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$.
- $g(t) = t^2 + 3t$.
- $h(x) = 7x^3 - 2x + 1$.

Réponse :

Méthode – dériver un polynôme terme à terme

On dérive chaque terme séparément, en gardant son signe :

- un terme $k x^n$ donne $k n x^{n-1}$: on multiplie par l'exposant, puis on baisse l'exposant de 1 ;
- un terme en x donne son coefficient ;
- le terme constant disparaît.

Point de vigilance. La dérivée d'une constante est nulle : pour $f(x) = 4$, on a $f'(x) = 0$, et non 4. Le terme constant d'un polynôme n'a donc aucune influence sur sa dérivée : $x^2 + 7$ et $x^2 - 100$ ont la même dérivée $2x$.

À vous – application 6

Dériver, puis calculer la valeur demandée.

- $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 9$: calculer $f'(1)$.
- $g(t) = 0,5t^2 + 2t + 100$: calculer $g'(4)$.
- $h(x) = -x^2 + 6x - 11$: calculer $h'(3)$ et interpréter le résultat.

Réponse :

§4. Interprétation : taux de variation

Vitesse, courant, débit : beaucoup de grandeurs du technicien ne sont rien d'autre que la dérivée d'une autre grandeur par rapport au temps. Le signe de cette dérivée dit dans quel sens le système évolue.

Méthode – interpréter f'

La dérivée $f'(a)$ donne le **taux de variation instantané** de f en a .

- Si $f'(a) > 0$, f est croissante autour de a .
- Si $f'(a) < 0$, f est décroissante autour de a .
- Si $f'(a) = 0$, la courbe a une tangente horizontale en a (souvent un *extremum*).

À vous – application 7

Pour $f(x) = x^2 - 8x + 3$, on a $f'(x) = 2x - 8$.

- Calculer $f'(1)$ et en déduire le sens de variation de f autour de 1.
- Calculer $f'(6)$ et conclure de même.
- Déterminer la valeur de x pour laquelle la tangente est horizontale.

Réponse :

Propriété – grandeurs dérivées en sciences physiques

Lorsqu'une grandeur décrit l'évolution d'une autre au cours du temps, elle en est la dérivée :

- position $x(t) \rightarrow$ vitesse instantanée $v(t) = x'(t)$;
- charge $q(t) \rightarrow$ intensité $i(t) = q'(t)$;
- volume $V(t) \rightarrow$ débit $D(t) = V'(t)$.

À vous – application 8

Dériver pour obtenir la grandeur demandée.

- La position d'un mobile est $x(t) = t^2 + 5t$ (en mètres, t en secondes). Calculer $v(t)$, puis $v(3)$.

- b) La charge d'un condensateur est $q(t) = 0,5t^2 + 2t$ (en coulombs). Calculer $i(t)$, puis $i(4)$.
 c) Le volume dans une cuve est $V(t) = 3t^2 + 5t$ (en litres, t en minutes). Calculer le débit $D(t)$, puis $D(10)$.

Réponse :

§5. Optimisation : trouver un extremum

Quelle quantité produire pour que le bénéfice soit maximal ? Quelles dimensions donner à une pièce pour utiliser le moins de matière ? Ces questions se ramènent toutes à chercher là où la dérivée s'annule.

Méthode – rechercher un extremum

Pour trouver les valeurs de x où une fonction f admet un maximum ou un minimum :

1. on calcule $f'(x)$;
2. on résout $f'(x) = 0$;
3. on étudie le signe de $f'(x)$ autour des solutions trouvées pour conclure.

Si le signe passe du $-$ au $+$, c'est un **minimum** ; s'il passe du $+$ au $-$, c'est un **maximum**.

À vous – application 9

Déterminer l'extremum de chaque fonction, en précisant sa nature.

- a) $C(x) = x^2 - 6x + 10$.
- b) $f(x) = -x^2 + 4x + 1$.
- c) $g(x) = 2x^2 - 12x + 5$.

Réponse :

Méthode – optimiser une grandeur en contexte

Quand l'énoncé décrit une situation plutôt qu'une fonction, on procède en trois temps :

1. on choisit une inconnue x et on exprime la grandeur à optimiser en fonction de x seule, en utilisant la contrainte de l'énoncé ;
2. on dérive et on résout $f'(x) = 0$;
3. on revient à la question posée en interprétant le résultat (dimensions, quantité, coût...).

À vous – application 10

Mettre en fonction, puis optimiser. Un rectangle a un périmètre de 40 m et on note x sa longueur.

- a) Exprimer sa largeur en fonction de x , puis son aire $A(x)$.
- b) Calculer $A'(x)$ et résoudre $A'(x) = 0$.

c) En déduire les dimensions du rectangle d'aire maximale, et cette aire.

Réponse :

Exercices classiques

Deux exercices d'application pour mettre en œuvre les notions du rappel sur une situation complète. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. D'autres exercices, ainsi que les activités en contexte métier, figurent dans le *cahier d'approfondissement*.

Exercice 1

La position d'un mobile est donnée par $x(t) = 0,5t^2 + 2t$, avec t en secondes et x en mètres.

1. Calculer $x(0)$ et $x(6)$, puis la vitesse moyenne du mobile entre ces deux instants.
2. Calculer $v(t) = x'(t)$, puis la vitesse instantanée à $t = 6$ s.
3. Déterminer l'instant auquel la vitesse instantanée atteint 10 m/s.

Réponse :

Exercice 2

Une cuve se remplit, mais de plus en plus lentement. Le volume qu'elle contient, en litres, est donné par $V(t) = -0,5t^2 + 20t$, où t est le temps en minutes.

1. Calculer $V(0)$ et $V(10)$.
2. Calculer le débit $D(t) = V'(t)$, puis le débit à $t = 0$ et à $t = 10$ minutes. Le remplissage ralentit-il bien ?
3. Déterminer l'instant auquel le débit s'annule. Que se passe-t-il physiquement à cet instant ?

Réponse :

Activités d'application

Activité 1 • De la position à l'accélération d'un axe d'usinage

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : dérivation d'un polynôme **Lien référentiel :** S11.1 — machines à commande numérique

La position d'un axe d'usinage (en mm) est donnée par $X(t) = 0,5t^2 + 2t$, avec t en secondes. On rappelle que la vitesse est la dérivée de la position ($V = X'$) et l'accélération la dérivée de la vitesse ($a = V'$).

1. Déterminer l'expression de la vitesse $V(t)$, puis de l'accélération $a(t)$.
2. En déduire la vitesse de l'axe à l'instant $t = 3$ s.

Réponse :

Activité 2 • Nombre dérivé et tangente

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : nombre dérivé, coefficient directeur **Lien référentiel :** lecture d'une courbe, pente

Soit la fonction $f(x) = x^2$. On rappelle que le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a .

1. Déterminer l'expression de la fonction dérivée $f'(x)$.
2. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 3$.

Réponse :

Activité 3 • Optimisation d'un coût d'usinage

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : dérivation, signe de la dérivée, extremum **Lien référentiel :** S8.6 — estimation des coûts de processus

Le coût d'usinage d'une série de pièces (en euros par pièce) est modélisé par $C(x) = x^2 - 6x + 10$, où x est un paramètre de réglage (par exemple, la vitesse de coupe normalisée). On rappelle qu'un minimum est atteint là où la dérivée s'annule.

1. Calculer la dérivée $C'(x)$, puis résoudre $C'(x) = 0$.
2. En déduire le réglage x qui minimise le coût et la valeur de ce coût minimal.

Réponse :

Activité 4 • Débit instantané de copeaux

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : dérivation, taux de variation **Lien référentiel :** S7.2 — enlèvement de matière

Le volume cumulé de copeaux produits par une machine (en cm^3) évolue selon $V(t) = t^2 + 3t$, avec t en minutes. Le débit instantané de copeaux est le taux de variation du volume, c'est-à-dire sa dérivée $V'(t)$.

1. Déterminer l'expression du débit $V'(t)$.
2. Calculer le débit à l'instant $t = 4$ min.

Réponse :

Activité 5 • Vitesse d'un objet en chute

PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : dérivation d'un polynôme **Lien référentiel :** S15 — cinématique (chute)

En première approximation, la distance parcourue par un objet en chute (en mètres) est $x(t) = 5t^2$, avec t en secondes. La vitesse est la dérivée de la position ($v = x'$).

1. Déterminer l'expression de la vitesse $v(t)$.
2. Calculer la vitesse à l'instant $t = 3$ s.

Réponse :

Activité 6 • Vitesse de refroidissement

PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : dérivation d'une fonction affine, signe **Lien référentiel :** S15 — thermique

La température d'une pièce qui refroidit (en °C) suit la loi $T(t) = 80 - 5t$, avec t en minutes. La vitesse de refroidissement est le taux de variation de la température, c'est-à-dire $T'(t)$.

1. Calculer $T'(t)$.
2. Interpréter le signe et la valeur du résultat.

Réponse :

Annexe : prise en main de la calculatrice

Cette annexe rassemble les gestes de calculatrice les plus utiles pour le parcours de consolidation. Elle s'appuie sur les deux modèles les plus répandus dans les lycées français : les Casio scientifiques (fx-92, Graph 25, Graph 35) et la Numworks. Les gestes décrits ici sont des acquis attendus du collège ou de la seconde, mais l'expérience montre qu'ils méritent d'être rappelés en début de BTS.

§1 — Choisir l'unité d'angle (degré ou radian)

En consolidation, on travaille en **degrés** : un angle droit vaut 90° , et c'est dans cette unité que sont donnés tous les énoncés de ce cahier. Avant tout calcul de sinus, cosinus ou tangente, il faut vérifier que la calculatrice est bien réglée en mode degré.

Sur Casio (fx-92, Graph 25/35)

Taper **SHIFT** puis **SETUP** (ou **MENU** puis **SETUP** selon le modèle). Choisir **Angle Unit**, puis **Degré** (**D**). À l'écran, un petit **D** s'affiche en haut. Si l'on voit **R** (radian) ou **G** (grade), on n'est pas en degré.

Sur Numworks

Appuyer sur **Réglages**, puis **Forme des angles**, puis sélectionner **Degré**. L'indication apparaît en haut de l'écran principal.

Vérification

Taper $\sin(30)$ et valider. Si le résultat est 0,5, on est bien en degré. Si l'on obtient $-0,988$, on est en radian : il faut basculer.

§2 — La touche π

Toutes les calculatrices ont une touche dédiée pour π . **On ne saisit jamais 3,14 à la place** : on perd en précision pour rien, et c'est plus long à taper. La touche π donne la valeur la plus précise que la calculatrice connaît.

Sur Casio (fx-92, Graph 25/35)

La touche π est au-dessus de la touche **EXP** (ou $\times 10^x$), accessible via **SHIFT**.

Sur Numworks

La touche π est directement accessible sur le clavier, sans **SHIFT**.

Vérification

Taper π et valider. On doit lire 3,14159... (et non 3,14).

§3 — Puissances et racines

Pour saisir une puissance, on utilise la touche x^y (notée parfois $\wedge$). La racine carrée a sa propre touche $\sqrt{}$.

Sur Casio (fx-92, Graph 25/35)

Pour 2^{10} : taper 2, puis x^y (ou $\wedge$), puis 10, puis =. Résultat : 1 024.

Pour $\sqrt{50}$: taper $\sqrt{}$, puis 50, puis =.

Sur Numworks

Pour 2^{10} : taper 2, puis $\wedge$, puis 10, puis EXE.

Pour $\sqrt{50}$: utiliser la touche $\sqrt{}$, puis saisir le contenu.

Attention au signe moins : pour saisir un exposant négatif comme 10^{-3} , on utilise la touche du *signe* négatif (souvent notée $(-)$), pas celle de la soustraction. Voir §4.

§4 — Notation scientifique : la touche EXP

Pour saisir un nombre en notation scientifique, comme $3,14 \times 10^{-6}$, on utilise la touche **EXP** (notée parfois **EE** ou $\times 10^x$). Cette touche signifie « fois dix puissance », il ne faut donc **pas** taper $\times 10$ avant.

Sur Casio (fx-92, Graph 25/35)

Pour saisir $3,14 \times 10^{-6}$: taper 3.14, puis EXP, puis $(-)$, puis 6.

La séquence $3.14 \times 10 \text{ EXP } -6$ est *fausse* : elle donne $3,14 \times 10 \times 10^{-6} = 3,14 \times 10^{-5}$.

Sur Numworks

Numworks utilise plutôt la notation naturelle. Pour saisir $3,14 \times 10^{-6}$, on peut soit taper la formule en clair (3.14×10^{-6}), soit utiliser la touche $\times 10^n$ dédiée.

Vérification

Taper 10^{-3} . On doit obtenir 0,001 (et non -1000 , qui serait le résultat d'une mauvaise saisie du signe).

§5 — Lire un résultat en notation scientifique

Quand un résultat est très grand ou très petit, la calculatrice l'affiche en notation scientifique. Par exemple, $3,14 \times 10^{-6}$ peut s'afficher **3.14E-06** ou 3.14×10^{-6} selon le modèle.

Sur Casio (fx-92, Graph 25/35)

L'affichage par défaut est **3.14E-06**. Le **E** signifie « $\times 10^{\dots}$ ». On peut basculer entre **Norm** (notation normale) et **Sci** (notation scientifique systématique) dans **SETUP**.

Sur Numworks

L'affichage utilise directement la notation $3,14 \cdot 10^{-6}$, plus lisible. Pas de risque de confusion avec une variable **E**.

Dans une copie ou un compte-rendu, on retranscrit toujours en notation mathématique propre : $3,14 \times 10^{-6}$, jamais **3.14E-06**.

§6 — Forme exacte ou valeur décimale

Les calculatrices récentes affichent par défaut les résultats sous **forme exacte** : un résultat avec π , une fraction non simplifiée, ou une racine carrée restent tels quels. Pour obtenir la valeur décimale approchée, on utilise la touche **S↔D** (Standard ↔ Décimal).

Sur Casio (*fx-92, Graph 25/35*)

Calculer $400 \times \pi$ donne 400π à l'écran. Appuyer sur **S↔D** pour obtenir 1 256,637...

Sur Numworks

Le résultat exact et la valeur approchée s'affichent souvent ensemble. On peut basculer entre les deux formes avec la touche dédiée.

Quel format choisir ? La forme exacte est précieuse pour comparer deux résultats ou pour les calculs en chaîne (pas d'arrondi cumulé). La valeur décimale est nécessaire pour interpréter physiquement un résultat (« la vitesse vaut environ 125,7 m/min »).

§7 — Calculs en chaîne : la touche Ans

Quand on enchaîne plusieurs calculs en réutilisant le résultat précédent, on **ne retape pas** le nombre à la main : on utilise la touche **Ans** (Answer), qui rappelle automatiquement le dernier résultat. Cela évite les erreurs de saisie et les arrondis.

Sur Casio (*fx-92, Graph 25/35*)

Après un calcul, taper directement +, -, $\times$ ou $\div$: la calculatrice insère **Ans** automatiquement. On peut aussi insérer **Ans** explicitement avec **SHIFT** puis **Ans**.

Sur Numworks

La touche **Ans** est directement accessible. Le résultat précédent est mémorisé après chaque EXE.

Exemple. Calculer $V = \pi \times 10^2 \times 100$, puis en déduire la masse $m = 7,85 \times V \times 10^{-3}$ (en grammes). Plutôt que de noter le résultat de V et le retaper, on enchaîne avec $\times 7.85 \times 10^{(-3)}$.

§8 — Trigonométrie inverse

Pour retrouver un angle à partir de son sinus, son cosinus ou sa tangente, on utilise les fonctions inverses $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ (souvent notées **ASIN**, **ACOS**, **ATAN**).

Sur Casio (*fx-92, Graph 25/35*)

Pour obtenir l'angle dont la tangente vaut 0,75 : taper **SHIFT**, puis **tan**, puis 0.75, puis =. En mode degré, on obtient $36,87^\circ$.

Sur Numworks

Les fonctions inverses sont accessibles via **shift** puis la fonction trigonométrique correspondante. Le résultat est dans l'unité d'angle active (degré ou radian).

Très important : l'unité du résultat dépend du mode actif. Si la calculatrice est en degré, $\tan^{-1}(0,75) \approx 36,87^\circ$. Si elle est en radian, le même calcul donne 0,6435 rad. Toujours vérifier le mode avant un calcul de trigonométrie inverse (voir §1).

Vérification

En mode degré : $\tan^{-1}(1)$ doit donner 45° . Si l'on obtient $0,785\dots$, on est en radian.