Lycée Jean-Baptiste de Baudre

Agen

Parcours de consolidation en mathématiques

Six semaines pour bien démarrer en BTS

Spécialité Électrotechnique

Version professeur

(énoncés et corrigés)

De la rentrée aux vacances de la Toussaint

Sommaire

1 Semaine 1 : Calcul, formules et unités **1**
- 1.1 Rappel mathématique 1
- 1.2 Exercices classiques 3
- 1.3 Activités d'application 6

2 Semaine 2 : Proportionnalité et géométrie de base **9**
- 2.1 Rappel mathématique 9
- 2.2 Exercices classiques 11
- 2.3 Activités d'application 13

3 Semaine 3 : Trigonométrie **17**
- 3.1 Rappel mathématique 17
- 3.2 Exercices classiques 19
- 3.3 Activités d'application 21

4 Semaine 4 : Vecteurs **24**
- 4.1 Rappel mathématique 24
- 4.2 Exercices classiques 26
- 4.3 Activités d'application 28

5 Semaine 5 : Fonctions et lecture graphique **31**
- 5.1 Rappel mathématique 31
- 5.2 Exercices classiques 34
- 5.3 Activités d'application 36

6 Semaine 6 : Dérivation **40**
- 6.1 Rappel mathématique 40
- 6.2 Exercices classiques 43
- 6.3 Activités d'application 45

7 Annexe : prise en main de la calculatrice **48**

Chapitre 1

Semaine 1 : Calcul, formules et unités

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) des exercices classiques d'application directe (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte Électrotech, qui réinvestissent ces notions dans des situations métier.

Rappel mathématique

Cette première semaine consolide les gestes de calcul élémentaires : manipuler les fractions, manier les puissances et la notation scientifique, convertir des unités sans se tromper, isoler une grandeur dans une formule. Ces gestes seront réinvestis dans toutes les semaines suivantes.

§1. Calcul sur les fractions

Définition – fraction

Une fraction $\dfrac{a}{b}$ représente le partage de a par b (avec $b \neq 0$). Le nombre a est le *numérateur*, b est le *dénominateur*.

Propriété – simplifier

Si l'on multiplie (ou divise) numérateur et dénominateur par un même nombre non nul, la fraction ne change pas de valeur :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}, \quad k \neq 0.$$

Exemple – $\dfrac{12}{18} = \dfrac{12 \div 6}{18 \div 6} = \dfrac{2}{3}$.

Propriété – additionner ou soustraire

Pour ajouter (ou retrancher) deux fractions, on les met au **même dénominateur**, puis on additionne (ou retranche) les numérateurs :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,d}{b\,d} + \frac{c\,b}{d\,b} = \frac{a\,d + c\,b}{b\,d}.$$

Exemple – $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{2 \times 4}{12} + \dfrac{1 \times 3}{12} = \dfrac{8+3}{12} = \dfrac{11}{12}$.

Propriété – multiplier ou diviser

Pour multiplier deux fractions, on multiplie numérateurs entre eux et dénominateurs entre eux :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

Pour diviser par une fraction, on multiplie par son inverse :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

Exemple – $\frac{3}{5} \times \frac{10}{9} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$. $\frac{5}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{8}$.

Point de vigilance. On additionne avec un dénominateur commun, mais on multiplie *sans* le faire. Confondre les deux est l'erreur la plus fréquente.

§2. Puissances et notation scientifique

Définition – puissance d'un nombre

Pour un entier $n \geq 1$, $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$. On pose $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Propriété – règles de calcul

Pour tous nombres a, b non nuls et entiers m, n :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{m\,n}, \quad (a \times b)^n = a^n \times b^n.$$

Exemple – $10^3 \times 10^{-5} = 10^{3+(-5)} = 10^{-2}$; $(10^{-3})^2 = 10^{-6}$.

Définition – notation scientifique

Un nombre est en notation scientifique s'il s'écrit $a \times 10^n$, avec $1 \leq |a| < 10$ et n entier relatif.

Exemple – $3\,200 = 3{,}2 \times 10^3$; $0{,}000\,034 = 3{,}4 \times 10^{-5}$.

À la calculatrice. Voir l'*Annexe : prise en main de la calculatrice*, §4 (saisie d'une notation scientifique) et §5 (lecture d'un résultat).

§3. Conversions d'unités

Les **préfixes du Système international** permettent d'exprimer une grandeur en multipliant l'unité de base par une puissance de 10 :

Préfixe	Symbole	Facteur	Préfixe	Symbole	Facteur
giga	G	10^9	milli	m	10^{-3}
méga	M	10^6	micro	µ	10^{-6}
kilo	k	10^3	nano	n	10^{-9}

Exemple – $3{,}3\ V = 3{,}3 \times 10^3\ mV = 3\,300\ mV$; $20\ \mu s = 20 \times 10^{-6}\ s = 2 \times 10^{-5}\ s$.

Méthode – conversion d'une aire ou d'un volume

Pour convertir une aire ou un volume entre deux unités, on convertit d'abord la dimension linéaire correspondante, puis on l'élève à la puissance appropriée.
Aire : 1 mm $= 10^{-3}$ m, donc 1 mm$^2 = (10^{-3})^2$ m$^2 = 10^{-6}$ m^2.
Volume : 1 mm $= 10^{-1}$ cm, donc 1 mm$^3 = (10^{-1})^3$ cm$^3 = 10^{-3}$ cm^3.

Point de vigilance. L'erreur classique est de croire que 1 mm$^2 = 10^{-3}$ m^2 (faux : l'exposant doit aussi être au carré).

§4. Isoler une grandeur dans une formule

Dans un calcul métier, on n'utilise pas toujours une formule dans le sens où elle est écrite. Si l'on connaît certaines grandeurs et que l'on cherche celle qui reste, il faut *isoler* cette grandeur.

Méthode – isoler une grandeur

On effectue les opérations inverses, dans l'ordre inverse, sur les deux membres de l'égalité, jusqu'à ce que la grandeur cherchée soit seule.

- Pour annuler une addition, on soustrait ; pour annuler une soustraction, on additionne.
- Pour annuler une multiplication, on divise ; pour annuler une division, on multiplie.
- Pour annuler un carré (sur un nombre positif), on prend la racine carrée.

Exemple – Isoler I dans $U = R \times I$. On divise les deux membres par R : $\dfrac{U}{R} = I$, soit $I = \dfrac{U}{R}$.

Exemple – Isoler h dans $V = L \times \ell \times h$. On divise par $L \times \ell$: $h = \dfrac{V}{L \times \ell}$.

Exemple – Isoler r dans $S = \pi r^2$. On divise par π : $\dfrac{S}{\pi} = r^2$. Puis on prend la racine carrée : $r = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$.

Exercices classiques

Ces exercices courts exercent les gestes mathématiques vus dans le rappel, sans contexte métier. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. Les huit premiers sont à traiter en priorité ; les quatre suivants, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Simplifier les fractions suivantes au maximum.

$$\frac{12}{18}, \quad \frac{15}{25}, \quad \frac{42}{56}.$$

Corrigé

$\dfrac{12}{18} = \dfrac{12/6}{18/6} = \dfrac{2}{3}$; $\dfrac{15}{25} = \dfrac{15/5}{25/5} = \dfrac{3}{5}$; $\dfrac{42}{56} = \dfrac{42/14}{56/14} = \dfrac{3}{4}$.

Exercice 2

Calculer en réduisant au même dénominateur :

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}, \qquad \frac{5}{6}-\frac{1}{2}.$$

Corrigé

$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}=\frac{11}{12}$; $\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}-\frac{3}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Exercice 3

Calculer (puis simplifier) :

$$\frac{3}{5}\times\frac{10}{9}, \qquad \frac{5}{4}\div\frac{2}{3}.$$

Corrigé

$\frac{3}{5}\times\frac{10}{9}=\frac{30}{45}=\frac{2}{3}$; $\frac{5}{4}\div\frac{2}{3}=\frac{5}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{15}{8}$.

Exercice 4

Calculer sans calculatrice :

$$2^5, \qquad 10^{-2}, \qquad (-3)^2, \qquad 5^0.$$

Corrigé

$2^5=32$; $10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}=0{,}01$; $(-3)^2=9$; $5^0=1$.

Exercice 5

Écrire en notation scientifique :

$$0{,}000\,034, \qquad 5\,200\,000, \qquad 12{,}5.$$

Corrigé

$0{,}000\,034=3{,}4\times10^{-5}$; $5\,200\,000=5{,}2\times10^{6}$; $12{,}5=1{,}25\times10^{1}$.

Exercice 6

Effectuer les conversions de longueur ou de durée :

- 250 mm en m ;
- 0,04 km en m ;
- 1,5 h en s.

Corrigé

250 mm $=250\times10^{-3}$ m $=0{,}25$ m ; $0{,}04$ km $=0{,}04\times10^{3}$ m $=40$ m ; $1{,}5$ h $=1{,}5\times3\,600$ s $=5\,400$ s.

Exercice 7

Convertir 400 mm^2 en cm^2 puis en m^2, en passant explicitement par la dimension linéaire.

Corrigé

1 mm $= 10^{-1}$ cm, donc 1 mm^2 $= 10^{-2}$ cm^2, donc 400 mm^2 $= 4$ cm^2.
1 mm $= 10^{-3}$ m, donc 1 mm^2 $= 10^{-6}$ m^2, donc 400 mm^2 $= 4 \times 10^{-4}$ m^2.

Exercice 8

Dans chacune des relations suivantes, isoler la grandeur indiquée.

- Dans $y = 3x + 2$, exprimer x en fonction de y.
- Dans $v = \dfrac{d}{t}$, exprimer d, puis t.
- Dans $P = U \times I$, exprimer I.

Corrigé

$y = 3x + 2 \Rightarrow y - 2 = 3x \Rightarrow x = \dfrac{y-2}{3}$.
$v = \dfrac{d}{t} \Rightarrow d = v \times t$; et $t = \dfrac{d}{v}$.
$P = U \times I \Rightarrow I = \dfrac{P}{U}$.

Pour aller plus loin

Exercice 9

Calculer :

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2}.$$

Corrigé

Dénominateur commun 12 : $\dfrac{9}{12} + \dfrac{10}{12} - \dfrac{6}{12} = \dfrac{13}{12}$.

Exercice 10

Simplifier l'expression à l'aide des règles de calcul sur les puissances :

$$\frac{10^5 \times 10^{-2}}{10^4}.$$

Corrigé

$\dfrac{10^5 \times 10^{-2}}{10^4} = \dfrac{10^{5-2}}{10^4} = \dfrac{10^3}{10^4} = 10^{3-4} = 10^{-1} = 0{,}1$.

Exercice 11

Convertir 2 500 mm^3 en cm^3, puis en litres (1 L $= 10^3$ cm^3).

Corrigé

$1\ \text{mm}^3 = 10^{-3}\ \text{cm}^3$, donc $2\,500\ \text{mm}^3 = 2{,}5\ \text{cm}^3$.
Puis $2{,}5\ \text{cm}^3 = 2{,}5 \times 10^{-3}\ \text{L} = 0{,}002\,5\ \text{L}$.

Exercice 12

Isoler h dans la formule du volume d'un cylindre $V = \pi\, r^2\, h$, puis isoler r dans la même formule.

Corrigé

$h = \dfrac{V}{\pi\, r^2}$.

Pour isoler r : on divise par $\pi\, h$: $\dfrac{V}{\pi\, h} = r^2$, puis on prend la racine carrée : $r = \sqrt{\dfrac{V}{\pi\, h}}$.

Activités d'application

Activité 1 • Loi d'Ohm ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *application d'une formule, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :*** *S2.1 — circuits électriques en régime continu*

La loi d'Ohm relie la tension U aux bornes d'un conducteur ohmique (en volts), la résistance R (en ohms, Ω) et l'intensité I qui le traverse (en ampères) :

$$U = R \times I\,.$$

1. Pour une résistance $R = 220\ \Omega$ traversée par un courant $I = 0{,}5$ A, calculer U.
2. On applique une tension $U = 24$ V aux bornes d'une résistance $R = 12\ \Omega$. Calculer I. (isoler I)

Corrigé

1. $U = 220 \times 0{,}5 = 110$ V.
2. $I = \dfrac{U}{R} = \dfrac{24}{12} = 2$ A.

Activité 2 • Puissance électrique en courant continu ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *application d'une formule, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :*** *S2.1 — puissance et énergie électriques*

La puissance électrique d'un récepteur en courant continu vaut

$$P = U \times I\,,$$

avec P en watts, U en volts et I en ampères.

1. Un moteur est alimenté sous $U = 24$ V avec un courant $I = 5$ A. Calculer la puissance P.
2. Pour atteindre $P = 96$ W sous la même tension, calculer l'intensité I. (isoler I)

Corrigé

1. $P = 24 \times 5 = 120$ W.
2. $I = \dfrac{P}{U} = \dfrac{96}{24} = 4$ A.

Activité 3 • Puissance dissipée par effet Joule — ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *application d'une formule, le carré d'un nombre* ***Lien référentiel :*** *S2.1 — effet Joule*

Dans une résistance traversée par un courant continu, la puissance dissipée vaut

$$P = R \times I^2 .$$

1. Pour $R = 10\ \Omega$ et $I = 3$ A, calculer P.
2. Pour la même résistance, on multiplie l'intensité par 2 ($I = 6$ A). Calculer la nouvelle puissance, puis indiquer par quel facteur elle a été multipliée.

Corrigé

1. $P = 10 \times 3^2 = 10 \times 9 = 90$ W.
2. $P = 10 \times 6^2 = 10 \times 36 = 360$ W, soit 4 fois plus : l'intensité intervient au carré, donc la doubler quadruple la puissance ($2^2 = 4$).

Activité 4 • Énergie consommée, conversion kWh ↔ J — ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *application d'une formule, conversion d'unités composées, notation scientifique* ***Lien référentiel :*** *S2.1 — énergie électrique, bilan énergétique*

L'énergie consommée par un appareil de puissance P pendant une durée t vaut $W = P \times t$. Selon les unités choisies, le résultat s'exprime en joules (P en W, t en s) ou en kilowattheures (P en kW, t en h).

1. Un radiateur de $P = 2$ kW fonctionne pendant $t = 5$ h. Calculer l'énergie W en kWh.
2. Sachant que 1 kW $= 10^3$ W et 1 h $= 3\,600$ s, exprimer 1 kWh en joules.
3. En déduire W en joules.
4. Pour le même radiateur, combien d'heures faut-il pour consommer 8 kWh ? (isoler t)

Corrigé

1. $W = 2 \times 5 = 10$ kWh.
2. 1 kWh $= 10^3 \times 3\,600 = 3{,}6 \times 10^6$ J.
3. $W = 10 \times 3{,}6 \times 10^6 = 3{,}6 \times 10^7$ J.
4. $t = \dfrac{W}{P} = \dfrac{8}{2} = 4$ h.

Activité 5 • Énergie thermique sensible — PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *application d'une formule, conversion d'unités* ***Lien référentiel :*** *S15 — Thermique (capacité thermique massique)*

Pour élever la température d'une masse m d'un corps de la valeur ΔT, il faut fournir une énergie

$$Q = m \times c \times \Delta T ,$$

où c est la capacité thermique massique. Pour l'eau, $c = 4\,180$ J/(kg · K).

1. Calculer l'énergie Q nécessaire pour élever la température de $m = 2$ kg d'eau de $\Delta T = 30$ °C (résultat en joules).
2. Convertir ce résultat en kilojoules (1 kJ = 10^3 J).

Corrigé

1. $Q = 2 \times 4\,180 \times 30 = 250\,800$ J.
2. $Q \approx 251$ kJ.

Activité 6 • Pression au fond d'un réservoir

PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *application d'une formule, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :*** *S15 — Statique des fluides*

Le principe fondamental de l'hydrostatique donne la différence de pression $\Delta P = \rho \times g \times h$. Pour l'eau, $\rho = 1\,000$ kg/m^3 et $g \approx 10$ N/kg.

1. Calculer ΔP à une profondeur $h = 3$ m (en pascals).
2. À quelle profondeur h atteint-on $\Delta P = 50\,000$ Pa ? (isoler h)

Corrigé

1. $\Delta P = 1\,000 \times 10 \times 3 = 30\,000$ Pa.
2. $h = \dfrac{\Delta P}{\rho\, g} = \dfrac{50\,000}{1\,000 \times 10} = 5$ m.

Chapitre 2

Semaine 2 : Proportionnalité et géométrie de base

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) des exercices classiques d'application directe (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte Électrotech, qui réinvestissent ces notions dans des situations métier.

Rappel mathématique

Cette deuxième semaine consolide les outils qui interviennent dans presque tous les calculs métier : reconnaître une situation de proportionnalité et l'exploiter, manier les pourcentages dans les deux sens, lire une échelle, et appliquer correctement les formules d'aires et de volumes usuels.

§1. Proportionnalité

Définition – deux grandeurs proportionnelles

Deux grandeurs x et y sont *proportionnelles* si le rapport $\frac{y}{x}$ est constant. Ce rapport est appelé **coefficient de proportionnalité**, noté k : $y = k \times x$.

Exemple – Le prix à payer pour de l'essence est proportionnel au volume servi : si 20 *L coûtent* 34 *€, alors* $k = \frac{34}{20} = 1{,}70$ *€/L.*

Propriété – produit en croix

Si quatre nombres a, b, c, d (avec b et d non nuls) vérifient $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $a \times d = b \times c$. On peut isoler n'importe laquelle des quatre grandeurs si l'on connaît les trois autres.

Exemple – Si $\frac{a}{3} = \frac{20}{12}$, *alors* $a \times 12 = 3 \times 20$, *soit* $a = \frac{60}{12} = 5$.

Point de vigilance. Avant d'appliquer le produit en croix, il faut s'assurer que la situation est bien proportionnelle. Par exemple, l'âge et la taille d'un enfant ne le sont pas.

§2. Pourcentages

Définition – pourcentage

Un pourcentage $p\,\%$ représente la fraction $\dfrac{p}{100}$. Calculer $p\,\%$ d'une quantité Q, c'est calculer $\dfrac{p}{100} \times Q$.

Exemple – 30 % de 250 € vaut $\dfrac{30}{100} \times 250 = 75$ *€.*

Méthode – augmentation et diminution

Augmenter une quantité de $p\,\%$ revient à la multiplier par $\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)$.
Diminuer une quantité de $p\,\%$ revient à la multiplier par $\left(1 - \dfrac{p}{100}\right)$.

Exemple – Un prix de 80 € subit une hausse de 15 % : nouveau prix $= 80 \times 1{,}15 = 92$ *€.*
Une remise de 20 % sur 80 € : prix soldé $= 80 \times 0{,}80 = 64$ *€.*

Point de vigilance. Une hausse de 20 % suivie d'une baisse de 20 % ne ramène pas au prix initial : $100 \times 1{,}20 \times 0{,}80 = 96$, pas 100.

§3. Échelles

Définition – échelle

Sur un plan ou une carte, l'*échelle* est le rapport entre une longueur sur le plan et la longueur réelle correspondante, exprimées dans la même unité :

$$\text{échelle} = \frac{\text{longueur sur le plan}}{\text{longueur réelle}}.$$

Une échelle s'écrit souvent sous la forme $1 : n$ (un sur n). Avec une échelle $1 : 50$, 1 cm sur le plan représente 50 cm en réalité ; ou encore, 1 mm sur le plan représente 50 mm.

Exemple – Sur un plan à l'échelle $1 : 100$*, un mur mesure 4 cm. Sa longueur réelle est* $4 \times 100 = 400$ *cm* $= 4$ *m.*

§4. Aires usuelles

Propriété – formules d'aires

Rectangle de longueur L et largeur ℓ : $S = L \times \ell$.
Triangle de base b et hauteur h : $S = \dfrac{b \times h}{2}$.
Disque de rayon r : $S = \pi r^2$. Circonférence (périmètre) : $\mathcal{P} = 2\pi r$.

Exemple – Disque de rayon $r = 5$ *cm :* $S = \pi \times 5^2 = 25\pi \approx 78{,}5$ *cm*^{2}.

Conversions d'aires. Pour passer d'une unité d'aire à une autre, on convertit la dimension linéaire correspondante et on élève au carré (voir semaine 1, §3).

§5. Volumes usuels

Propriété – formules de volumes

Parallélépipède rectangle de longueur L, largeur ℓ, hauteur h : $V = L \times \ell \times h$.
Cylindre de rayon r et hauteur h : $V = \pi r^2 h$.
Sphère de rayon r : $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Exemple – Cylindre de rayon $r = 2$ cm et hauteur $h = 10$ cm : $V = \pi \times 2^2 \times 10 = 40\pi \approx 125{,}7$ cm^3.

Conversions de volumes. Pour passer d'une unité de volume à une autre, on convertit la dimension linéaire et on élève au cube (voir semaine 1, §3).

Exercices classiques

Les huit premiers sont à traiter en priorité ; les quatre suivants, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Quatre stylos coûtent 6 €. En supposant la proportionnalité, calculer le prix de 10 stylos, puis combien on peut en acheter avec 21 €.

Corrigé

Coefficient : $\dfrac{6}{4} = 1{,}5$ €/stylo. Prix de 10 stylos : $10 \times 1{,}5 = 15$ €. Nombre de stylos avec 21 € : $\dfrac{21}{1{,}5} = 14$.

Exercice 2

Une voiture parcourt 180 km en 2 h à vitesse constante. Calculer la distance parcourue en 3 h 30 min (avec produit en croix).

Corrigé

3 h 30 min = 3,5 h.
$\dfrac{180}{2} = \dfrac{d}{3{,}5}$, donc $d = \dfrac{180 \times 3{,}5}{2} = 315$ km.

Exercice 3

Calculer mentalement (ou en posant le calcul) :
- 25 % de 200 € ;
- 10 % de 45 kg ;
- 75 % de 80 m.

Corrigé

25 % de 200 $= \dfrac{25}{100} \times 200 = 50$ € ; 10 % de 45 = 4,5 kg ; 75 % de 80 $= \dfrac{75}{100} \times 80 = 60$ m.

Exercice 4

Un article coûte 120 €. Calculer son nouveau prix après :

- une augmentation de 15 % ;
- une remise de 30 %.

Corrigé

Nouveau prix après hausse : $120 \times 1{,}15 = 138$ €.
Nouveau prix après remise : $120 \times 0{,}70 = 84$ €.

Exercice 5

Sur un plan à l'échelle 1 : 50, une pièce mesure 8 cm de long et 6 cm de large. Calculer ses dimensions réelles, en mètres.

Corrigé

Longueur réelle : $8 \times 50 = 400$ cm $= 4$ m.
Largeur réelle : $6 \times 50 = 300$ cm $= 3$ m.

Exercice 6

Calculer l'aire des figures suivantes.

- Rectangle de longueur 12 cm et largeur 5 cm.
- Triangle de base 8 cm et hauteur 6 cm.
- Disque de rayon 4 cm (valeur exacte, puis approchée au dixième).

Corrigé

Rectangle : $12 \times 5 = 60$ cm^2.
Triangle : $\dfrac{8 \times 6}{2} = 24$ cm^2.
Disque : $\pi \times 4^2 = 16\,\pi \approx 50{,}3$ cm^2.

Exercice 7

Calculer le volume des solides suivants.

- Parallélépipède rectangle de dimensions 10 cm × 6 cm × 4 cm.
- Cylindre de rayon 3 cm et hauteur 10 cm (valeur exacte puis approchée).

Corrigé

Parallélépipède : $10 \times 6 \times 4 = 240$ cm^3.
Cylindre : $\pi \times 3^2 \times 10 = 90\,\pi \approx 282{,}7$ cm^3.

Exercice 8

Un disque de rayon r a une aire de $S = 100\,\pi$ cm^2. Calculer la valeur de r.

Corrigé

$\pi\, r^2 = 100\,\pi \Rightarrow r^2 = 100 \Rightarrow r = 10$ cm.

Pour aller plus loin

Exercice 9

Le prix d'un produit augmente de 20 %, puis baisse de 20 %. Le prix de départ étant de 100 €, calculer le prix final. Que constate-t-on ?

Corrigé

Prix après hausse : $100 \times 1{,}20 = 120$ €.
Prix après baisse : $120 \times 0{,}80 = 96$ €.
Le prix final est inférieur au prix initial : une hausse puis une baisse de même pourcentage ne ramènent pas au prix de départ.

Exercice 10

Sur un plan à l'échelle 1 : 200, on mesure 35 mm entre deux points. Quelle est la distance réelle correspondante, en mètres ?

Corrigé

Distance réelle $= 35 \times 200 = 7\,000$ mm $= 7$ m.

Exercice 11

Un cylindre a une hauteur $h = 20$ cm et un volume $V = 500\,\pi$ cm^3. Calculer son rayon r.

Corrigé

$$\pi\, r^2\, h = 500\,\pi \Rightarrow r^2 = \frac{500}{h} = \frac{500}{20} = 25 \Rightarrow r = 5 \text{ cm}.$$

Exercice 12

Un terrain rectangulaire mesure 30 m de long et 20 m de large.

- Calculer son aire en mètres carrés.
- Sur un plan à l'échelle 1 : 500, quelles sont les dimensions du terrain sur le plan, en centimètres ?

Corrigé

Aire : $30 \times 20 = 600$ m^2.
Sur le plan : longueur $= \dfrac{30\,\text{m}}{500} = \dfrac{3\,000\,\text{cm}}{500} = 6$ cm ; largeur $= 4$ cm.

Activités d'application

Activité 1 • Rapport de transformation d'un transformateur ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *proportionnalité, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :*** *S2.2 — transformateurs monophasés*

Pour un transformateur idéal, la tension secondaire U_2 est proportionnelle à la tension primaire U_1 : $U_2 = m \times U_1$, où m est le *rapport de transformation*.

1. Un transformateur reçoit $U_1 = 230$ V et fournit $U_2 = 23$ V. Calculer m.
2. En conservant le même rapport, on alimente maintenant le primaire sous $U_1 = 400$ V. Calculer la nouvelle tension secondaire U_2.

Corrigé

1. $m = \dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{23}{230} = 0{,}1$.
2. $U_2 = m \times U_1 = 0{,}1 \times 400 = 40$ V.

Activité 2 • Section circulaire d'un câble, conversion $\text{mm}^2 \to \text{m}^2$ ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *formule d'aire, conversion d'unités* ***Lien référentiel :*** *S3.2 — canalisations et câbles électriques*

La section d'un câble rond de rayon r vaut $S = \pi\, r^2$.

1. Un câble a un rayon $r = 1$ mm. Calculer sa section S en mm^2 (résultat arrondi au centième).
2. Exprimer 1 mm en mètres sous la forme d'une puissance de 10, puis en déduire à quoi est égal 1 mm^2 en m^2.
3. En déduire S en m^2.

Corrigé

1. $S = \pi \times 1^2 = \pi \approx 3{,}14\ \text{mm}^2$.
2. $1\ \text{mm} = 10^{-3}$ m, donc $1\ \text{mm}^2 = (10^{-3})^2 = 10^{-6}\ \text{m}^2$.
3. $S \approx 3{,}14 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$.

Activité 3 • Volume et masse d'un câble de cuivre ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *volume d'un cylindre, conversion $\text{mm}^3 \to \text{cm}^3$, masse volumique* ***Lien référentiel :*** *S3.2 — choix des câbles, devis matière*

La quantité de cuivre dans un câble se calcule à partir de sa section S et de sa longueur L : $V = S \times L$. La masse se déduit ensuite via la masse volumique : $m = \rho \times V$. Pour le cuivre, $\rho = 8{,}9\ \text{g/cm}^3$.

On considère un câble de section $S = 10\ \text{mm}^2$ et de longueur $L = 100$ m.

1. Exprimer L en millimètres, puis calculer le volume V en mm^3.
2. Exprimer 1 mm en cm sous la forme d'une puissance de 10, puis en déduire à quoi est égal 1 mm^3 en cm^3.
3. En déduire V en cm^3.
4. Calculer la masse m du cuivre du câble, en grammes puis en kilogrammes.

Corrigé

1. $L = 100\ \text{m} = 100\,000$ mm, donc $V = 10 \times 100\,000 = 10^6\ \text{mm}^3$.
2. $1\ \text{mm} = 10^{-1}$ cm, donc $1\ \text{mm}^3 = (10^{-1})^3 = 10^{-3}\ \text{cm}^3$.
3. $V = 10^6 \times 10^{-3} = 10^3 = 1\,000\ \text{cm}^3$.
4. $m = 8{,}9 \times 1\,000 = 8\,900\ \text{g} = 8{,}9$ kg.

Activité 4 • Autonomie d'une batterie ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *proportionnalité, application d'une formule* ***Lien référentiel :*** *S2.2 — stockage de l'énergie électrique*

La capacité d'une batterie s'exprime en ampères-heures (Ah). Pour un courant I constant débité, l'autonomie t se déduit de $Q = I \times t$: $t = \dfrac{Q}{I}$.

1. Une batterie de capacité $Q = 100$ Ah alimente un appareil consommant $I = 5$ A. Calculer l'autonomie t, en heures.
2. Pour quelle intensité I l'autonomie atteindrait-elle $t = 50$ h ? (isoler I)

Corrigé

1. $t = \dfrac{100}{5} = 20$ h.
2. $I = \dfrac{Q}{t} = \dfrac{100}{50} = 2$ A.

Activité 5 • Lecture d'un schéma électrique à l'échelle — ÉLECTROTECHNIQUE

***Outil réinvesti** : proportionnalité, échelle* ***Lien référentiel** : S3.1 — plans et schémas d'installation*

Un schéma d'installation est tracé à l'échelle **1:50** : une longueur réelle est cinquante fois la longueur correspondante sur le plan.

1. Sur le plan, une canalisation mesure 8 mm. Quelle est sa longueur réelle ?
2. Une canalisation mesure réellement 10 m. Quelle est sa longueur sur le plan, en mm ?

Corrigé

1. Longueur réelle $= 50 \times 8 = 400$ mm $= 0{,}4$ m.
2. 10 m $= 10\,000$ mm, donc longueur sur le plan $= \dfrac{10\,000}{50} = 200$ mm.

Activité 6 • Identifier un matériau par sa masse volumique — PHYSIQUE APPLIQUÉE

***Outil réinvesti** : proportionnalité, application de formule* ***Lien référentiel** : S15 — Matière et matériaux (masse volumique)*

La masse volumique relie la masse m d'un échantillon à son volume V.

1. Écrire la relation entre ρ, m et V.
2. Un échantillon a une masse $m = 270$ g pour un volume $V = 100$ cm^3. Calculer sa masse volumique en g/cm^3.
3. Sachant que l'aluminium a $\rho = 2{,}7$ g/cm^3, de quel matériau s'agit-il probablement ?

Corrigé

1. $\rho = \dfrac{m}{V}$.
2. $\rho = \dfrac{270}{100} = 2{,}7$ g/cm^3.
3. Cette valeur correspond à l'aluminium.

Activité 7 • Dilatation linéaire d'un câble — PHYSIQUE APPLIQUÉE

***Outil réinvesti** : proportionnalité, application d'une formule* ***Lien référentiel** : S15 — Thermique (dilatation)*

La variation de longueur d'un câble due à un changement de température suit la relation $\Delta L = \alpha \times L \times \Delta T$, où α est le coefficient de dilatation linéique. Pour l'acier, $\alpha = 12 \times 10^{-6}$ K^{-1}. Une ligne d'acier de longueur $L = 100$ m subit une variation $\Delta T = 50$ K.

1. Calculer ΔL, en mètres.
2. Convertir le résultat en millimètres.

Corrigé

1. $\Delta L = 12 \times 10^{-6} \times 100 \times 50 = 6 \times 10^{-2}$ m.
2. $\Delta L = 0{,}06$ m $= 60$ mm.

Chapitre 3

Semaine 3 : Trigonométrie

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) des exercices classiques d'application directe (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte Électrotech, qui réinvestissent ces notions dans des situations métier.

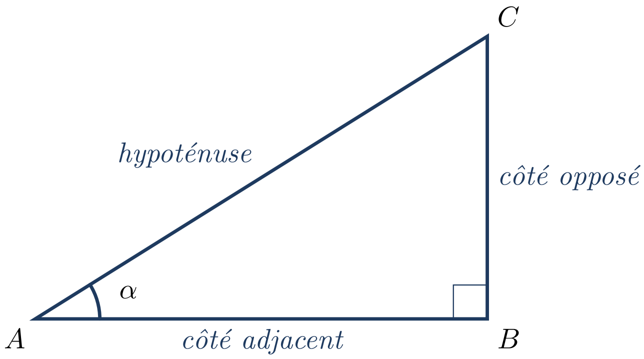
Rappel mathématique

Cette semaine consolide les outils de la trigonométrie du triangle rectangle : théorème de Pythagore, et relations entre les côtés et les angles via sinus, cosinus et tangente. Ces outils sont mobilisés dès qu'on travaille sur une géométrie inclinée, une force décomposée, ou un signal périodique.

§1. Triangle rectangle : vocabulaire

Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit est appelé **hypoténuse** ; c'est toujours le côté le plus long. Les deux autres côtés forment les *côtés de l'angle droit*. Pour un angle aigu α donné du triangle, on distingue :

- le **côté opposé** à α : le côté qui ne touche pas α ;
- le **côté adjacent** à α : le côté de l'angle droit qui touche α.



§2. Théorème de Pythagore

Propriété – théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés :

$$(\text{hypoténuse})^2 = (\text{côté } 1)^2 + (\text{côté } 2)^2 \,.$$

Exemple – Pour un triangle rectangle de côtés $a = 3$, $b = 4$ *: l'hypoténuse vaut* $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Réciproque utile. Si l'on connaît l'hypoténuse c et un côté a, on isole l'autre côté : $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

§3. Sinus, cosinus, tangente

Définition – rapports trigonométriques

Pour un angle aigu α d'un triangle rectangle :

$$\sin\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}, \quad \cos\alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}, \quad \tan\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$

Moyen mnémotechnique : SOH-CAH-TOA. *Sinus = Opposé / Hypoténuse, Cosinus = Adjacent / Hypoténuse, Tangente = Opposé / Adjacent.*

Exemple – Dans un triangle rectangle avec $\alpha = 30°$, $\sin 30° = 0{,}5$. *Si l'hypoténuse vaut* 10 *cm, le côté opposé vaut* $10 \times 0{,}5 = 5$ *cm.*

§4. Valeurs particulières

Propriété – angles remarquables

Angle α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

On retient au minimum $\sin 30° = 0{,}5$ et $\cos 60° = 0{,}5$: les autres se retrouvent à la calculatrice.

À la calculatrice. Avant tout calcul de sinus, cosinus ou tangente, vérifier que la calculatrice est bien en mode **degré** (voir l'*Annexe : prise en main de la calculatrice*, §1).

§5. Trouver un angle à partir d'un rapport

Méthode – retrouver un angle (trigonométrie inverse)

Si l'on connaît la valeur d'un rapport trigonométrique et qu'on cherche l'angle correspondant, on utilise les fonctions *inverses* :

$$\alpha = \sin^{-1}(\ldots) \quad \text{ou} \quad \alpha = \cos^{-1}(\ldots) \quad \text{ou} \quad \alpha = \tan^{-1}(\ldots).$$

On les note aussi arcsin, arccos, arctan. La calculatrice y accède par `SHIFT` puis la touche correspondante.

Exemple – Si $\tan\alpha = 0{,}75$, *alors* $\alpha = \tan^{-1}(0{,}75) \approx 36{,}87°$.

Point de vigilance. L'unité du résultat dépend du mode actif. En mode degré, $\tan^{-1}(1) = 45°$; en mode radian, $\tan^{-1}(1) \approx 0{,}785\,4$. **Toujours vérifier le mode** (voir Annexe Calculatrice §8).

Exercices classiques

Les huit premiers sont à traiter en priorité ; les quatre suivants, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Un triangle rectangle a des côtés de l'angle droit $a = 6$ cm et $b = 8$ cm. Calculer la longueur de l'hypoténuse.

Corrigé

$c = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ cm.

Exercice 2

Un triangle rectangle a une hypoténuse $c = 13$ cm et un côté $a = 5$ cm. Calculer la longueur du second côté.

Corrigé

$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ cm.

Exercice 3

Calculer (à la calculatrice, en mode degré) :

$$\sin 30^\circ\,, \quad \cos 60^\circ\,, \quad \tan 45^\circ\,, \quad \sin 90^\circ\,.$$

Corrigé

$\sin 30^\circ = 0{,}5$; $\cos 60^\circ = 0{,}5$; $\tan 45^\circ = 1$; $\sin 90^\circ = 1$.

Exercice 4

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse mesure 10 cm et l'un des angles aigus vaut $\alpha = 30^\circ$. Calculer la longueur du côté opposé à α.

Corrigé

$\sin\alpha = \dfrac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$, donc opposé $= 10 \times \sin 30^\circ = 10 \times 0{,}5 = 5$ cm.

Exercice 5

Dans un triangle rectangle, le côté adjacent à $\alpha = 40^\circ$ mesure 8 cm. Calculer la longueur de l'hypoténuse (résultat arrondi au dixième).

Corrigé

$\cos\alpha = \dfrac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$, donc hypoténuse $= \dfrac{8}{\cos 40^\circ} \approx \dfrac{8}{0{,}766} \approx 10{,}4$ cm.

Exercice 6

Dans un triangle rectangle, le côté opposé à α mesure 7 cm et le côté adjacent mesure 24 cm. Calculer l'angle α (résultat arrondi au degré).

Corrigé

$\tan\alpha = \dfrac{7}{24} \approx 0{,}292$, donc $\alpha = \tan^{-1}(0{,}292) \approx 16°$.

Exercice 7

Un triangle rectangle a une hypoténuse de 15 cm et un côté opposé à un angle α de 9 cm. Calculer l'angle α (résultat arrondi au degré).

Corrigé

$\sin\alpha = \dfrac{9}{15} = 0{,}6$, donc $\alpha = \sin^{-1}(0{,}6) \approx 37°$.

Exercice 8

Vérifier sur sa calculatrice qu'on est bien en mode degré, en calculant $\sin 90°$. Quel résultat doit-on obtenir ? Et si le mode est radian, que donne le calcul ?

Corrigé

En mode degré : $\sin 90° = 1$ (exactement).
En mode radian : $\sin 90 \approx 0{,}894$ (la calculatrice interprète 90 comme 90 radians). Si l'on obtient ce résultat, c'est qu'il faut basculer en mode degré.

Pour aller plus loin

Exercice 9

Un triangle rectangle a une hypoténuse de longueur c. Démontrer, à partir des définitions, que pour tout angle aigu α de ce triangle on a $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$.

Corrigé

Soit a le côté opposé à α, b le côté adjacent. Alors $\sin\alpha = a/c$ et $\cos\alpha = b/c$. Donc

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1\,,$$

par le théorème de Pythagore.

Exercice 10

Une échelle est appuyée contre un mur. Elle mesure 5 m et fait un angle de 70° avec le sol. Calculer la hauteur atteinte sur le mur (résultat arrondi au centimètre).

Corrigé

La hauteur est le côté opposé à l'angle 70° ; l'échelle est l'hypoténuse.
Hauteur $= 5 \times \sin 70° \approx 5 \times 0{,}9397 \approx 4{,}70$ m $= 470$ cm.

Exercice 11

Un triangle rectangle a pour côtés 1, $\sqrt{3}$, 2. Identifier l'hypoténuse, puis calculer les trois angles (aidé du tableau des valeurs particulières).

Corrigé

L'hypoténuse est le côté le plus long : 2. On a un angle droit ; les deux autres angles α et β vérifient $\alpha + \beta = 90°$.
$\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$ donc $\alpha = 30°$; et donc $\beta = 60°$.

Exercice 12

Dans un triangle rectangle, on connaît $\sin\alpha = 0{,}28$. Calculer α (au degré près), puis $\cos\alpha$ et $\tan\alpha$ (à 10^{-2} près).

Corrigé

$\alpha = \sin^{-1}(0{,}28) \approx 16°$.
$\cos\alpha \approx \cos 16° \approx 0{,}96$; $\tan\alpha \approx \tan 16° \approx 0{,}29$.

Activités d'application

Activité 1 • Puissance apparente d'une installation (Pythagore) ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *théorème de Pythagore* ***Lien référentiel :*** *S2.1 — puissances active, réactive, apparente*

Dans une installation en régime alternatif, les puissances active P (en kW), réactive Q (en kVAR) et apparente S (en kVA) sont reliées par

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}\,.$$

1. Énoncer le théorème de Pythagore : il relie l'hypoténuse c aux deux côtés de l'angle droit a et b d'un triangle rectangle.
2. Pour $P = 3$ kW et $Q = 4$ kVAR, calculer S.

Corrigé

1. $c^2 = a^2 + b^2$, donc $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. $S = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ kVA.

Activité 2 • Facteur de puissance (cosinus) ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *cosinus, rapport, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :*** *S2.1 — facteur de puissance*

Le facteur de puissance d'une installation est défini par

$$\cos\varphi = \frac{P}{S}\,,$$

où P est la puissance active et S la puissance apparente.
1. Une installation a $P = 8$ kW et $S = 10$ kVA. Calculer $\cos\varphi$.
2. Pour $\cos\varphi = 0{,}95$ et $P = 19$ kW, calculer S. (isoler S)

Corrigé

1. $\cos\varphi = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$.
2. $S = \dfrac{P}{\cos\varphi} = \dfrac{19}{0{,}95} = 20$ kVA.

Activité 3 • Force de Laplace sur un conducteur incliné (sinus) ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *sinus, application d'une formule* ***Lien référentiel :*** *S2.2 — forces sur les conducteurs*

Un conducteur de longueur L, parcouru par un courant I et placé dans un champ magnétique d'intensité B, subit une force dont la valeur dépend de l'angle θ entre le conducteur et le champ :

$$F = B \times I \times L \times \sin\theta\,.$$

On donne $B = 1$ T, $I = 10$ A et $L = 0{,}5$ m.

1. Calculer F pour $\theta = 30°$.
2. Calculer F pour $\theta = 90°$. Interpréter.

Corrigé

1. $F = 1 \times 10 \times 0{,}5 \times \sin 30° = 5 \times 0{,}5 = 2{,}5$ N.
2. $F = 1 \times 10 \times 0{,}5 \times 1 = 5$ N : c'est la valeur maximale, atteinte quand le conducteur est perpendiculaire au champ magnétique.

Activité 4 • Longueur de câble pour une descente inclinée ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *sinus, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :*** *S3.2 — pose et cheminement des câbles*

Un câble doit relier le haut d'un mur à un point au sol, en descendant en ligne droite avec une inclinaison $\alpha = 30°$ par rapport au sol. Le mur a une hauteur $h = 10$ m.
Dans le triangle rectangle formé, h est le côté opposé à l'angle α et la longueur L du câble en est l'hypoténuse.

1. Exprimer $\sin\alpha$ en fonction de h et L.
2. En déduire L. (isoler L)

Corrigé

1. $\sin\alpha = \dfrac{h}{L}$.
2. $L = \dfrac{h}{\sin\alpha} = \dfrac{10}{\sin 30°} = \dfrac{10}{0{,}5} = 20$ m.

Activité 5 • Réfraction de la lumière PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *sinus, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :*** *S15 — Optique (réfraction)*

La loi de la réfraction (Snell–Descartes) est : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$. On donne $n_1 = 1$ (air), $n_2 = 1{,}5$ (verre) et $i_1 = 30°$.

1. Exprimer $\sin i_2$. (isoler $\sin i_2$)
2. Calculer $\sin i_2$, puis en déduire i_2.

Corrigé

1. $\sin i_2 = \dfrac{n_1 \sin i_1}{n_2}$.
2. $\sin i_2 = \dfrac{1 \times 0{,}5}{1{,}5} \approx 0{,}333$, donc $i_2 \approx 19{,}5°$.

Activité 6 • Valeur instantanée d'une tension sinusoïdale — PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *sinus* ***Lien référentiel :*** *S15 — Électricité (grandeurs alternatives)*

Une tension alternative suit le modèle $u = U_{\max} \sin\theta$, où $U_{\max}$ est la tension de crête. On donne $U_{\max} = 325$ V.

1. Calculer u pour $\theta = 30°$.
2. Calculer u pour $\theta = 90°$. Que représente cette valeur ?

Corrigé

1. $u = 325 \times 0{,}5 = 162{,}5$ V.
2. $u = 325 \times 1 = 325$ V : c'est la tension de crête.

Chapitre 4

Semaine 4 : Vecteurs

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) des exercices classiques d'application directe (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte Électrotech, qui réinvestissent ces notions dans des situations métier.

Rappel mathématique

Cette semaine consolide les outils sur les vecteurs : représentation graphique, composantes, addition, et calcul de la norme. Ces outils sont mobilisés dès qu'on travaille sur des forces, des vitesses, des courants ou des grandeurs alternatives représentés vectoriellement.

§1. Vecteur, composantes

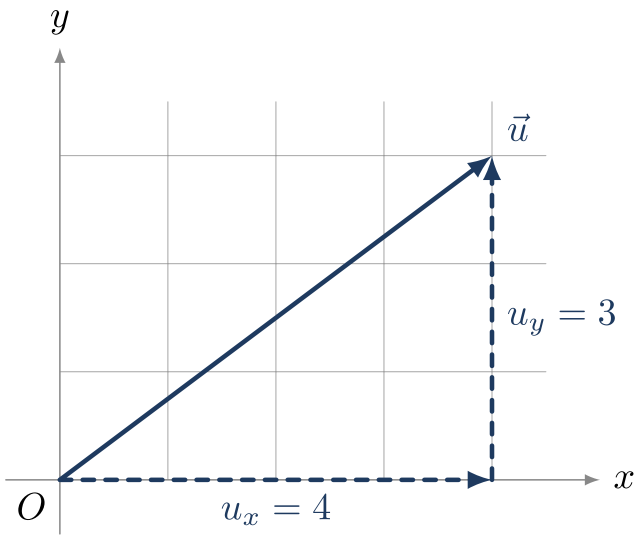
Définition – vecteur

Un vecteur, noté $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{AB}$, est caractérisé par trois éléments : une **direction** (la droite qui le porte), un **sens** (de A vers B), et une **norme** (sa longueur), notée $\|\overrightarrow{u}\|$ ou $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Définition – composantes d'un vecteur

Dans un repère orthonormé du plan, un vecteur $\overrightarrow{u}$ est décrit par ses *composantes* $(x\,;\,y)$, où x est son déplacement horizontal et y son déplacement vertical.

Exemple – Si $A(1\,;\,2)$ *et* $B(4\,;\,6)$*, alors* $\overrightarrow{AB} = (4-1\,;\,6-2) = (3\,;\,4)$.



§2. Norme d'un vecteur

Propriété – norme

La norme d'un vecteur de composantes $(x\,;\,y)$ vaut

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

C'est la longueur du vecteur, calculée par le théorème de Pythagore.

Exemple – Pour $\vec{u} = (3\,;\,4)$ *:* $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

§3. Somme de vecteurs

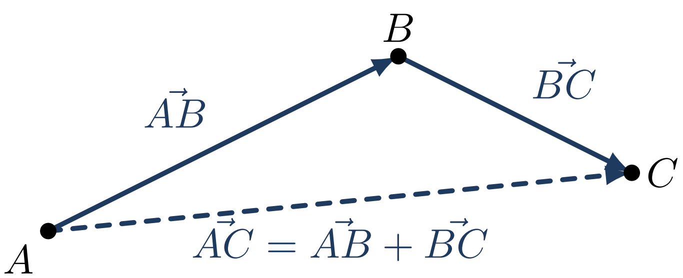
Propriété – somme par composantes

Pour additionner deux vecteurs, on additionne les composantes de même nature :

$$\vec{u_1} = (x_1\,;\,y_1)\,, \quad \vec{u_2} = (x_2\,;\,y_2)\,, \quad \vec{u_1} + \vec{u_2} = (x_1 + x_2\,;\,y_1 + y_2)\,.$$

Exemple – Si $\vec{u_1} = (3\,;\,0)$ *et* $\vec{u_2} = (0\,;\,4)$*, alors* $\vec{u_1} + \vec{u_2} = (3\,;\,4)$*, de norme* 5.

Représentation graphique. On place les vecteurs bout à bout (origine du second sur l'extrémité du premier) ; la somme va de l'origine du premier à l'extrémité du second. C'est la *relation de Chasles* : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



§4. Direction d'un vecteur

Méthode – angle d'un vecteur avec l'axe horizontal

Pour un vecteur $\overrightarrow{u} = (x\,;\,y)$ avec $x > 0$, l'angle θ qu'il fait avec l'axe horizontal se calcule par

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \quad \text{donc} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Exemple – Pour $\overrightarrow{u} = (3\,;\,4)$ *:* $\tan\theta = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}33$*, donc* $\theta \approx 53°$.

À la calculatrice. L'angle est obtenu en mode degré avec la fonction $\tan^{-1}$ (voir Annexe Calculatrice §8).

§5. Vecteurs colinéaires opposés

Quand deux vecteurs ont la même direction mais des sens opposés, leur somme algébrique sur cette direction est leur différence en valeur absolue, et le sens est celui du plus grand.

Exemple – Une force de 50 *N vers le bas et une autre de* 30 *N vers le haut ont pour résultante* $50 - 30 = 20$ *N vers le bas.*

Exercices classiques

Les huit premiers sont à traiter en priorité ; les quatre suivants, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Soit $A(2\,;\,3)$ et $B(8\,;\,11)$. Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Corrigé

$\overrightarrow{AB} = (8 - 2\,;\,11 - 3) = (6\,;\,8)$.

Exercice 2

Calculer la norme des vecteurs suivants.
- $\overrightarrow{u_1} = (3\,;\,4)$
- $\overrightarrow{u_2} = (5\,;\,12)$
- $\overrightarrow{u_3} = (-6\,;\,8)$

Corrigé

$\|\overrightarrow{u_1}\| = \sqrt{9 + 16} = 5$; $\|\overrightarrow{u_2}\| = \sqrt{25 + 144} = 13$; $\|\overrightarrow{u_3}\| = \sqrt{36 + 64} = 10$.

Exercice 3

Calculer la somme $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ pour les vecteurs suivants.
- $\overrightarrow{u} = (2\,;\,5)$, $\overrightarrow{v} = (3\,;\,-1)$;
- $\overrightarrow{u} = (-4\,;\,7)$, $\overrightarrow{v} = (4\,;\,-2)$.

Corrigé

$\vec{u} + \vec{v} = (2 + 3\,;\, 5 - 1) = (5\,;\, 4)$.
$\vec{u} + \vec{v} = (-4 + 4\,;\, 7 - 2) = (0\,;\, 5)$.

Exercice 4

On donne $\vec{u_1} = (3\,;\, 0)$ et $\vec{u_2} = (0\,;\, 4)$. Calculer les composantes de la somme $\vec{S} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$, puis sa norme.

Corrigé

$\vec{S} = (3\,;\, 4)$; $\|\vec{S}\| = \sqrt{9 + 16} = 5$.

Exercice 5

Soit le vecteur $\vec{u} = (6\,;\, 8)$. Calculer l'angle θ qu'il fait avec l'axe horizontal (résultat arrondi au degré).

Corrigé

$\tan\theta = \dfrac{8}{6} \approx 1{,}33$, donc $\theta = \tan^{-1}(1{,}33) \approx 53°$.

Exercice 6

Soit le vecteur $\vec{u} = (5\,;\, 12)$. Calculer sa norme et l'angle qu'il fait avec l'axe horizontal.

Corrigé

$\|\vec{u}\| = \sqrt{25 + 144} = 13$.
$\tan\theta = \dfrac{12}{5} = 2{,}4$, donc $\theta \approx 67{,}4°$.

Exercice 7

Deux forces colinéaires de sens opposés s'appliquent sur un objet : $F_1 = 80$ N vers la droite et $F_2 = 50$ N vers la gauche. Calculer la valeur et le sens de la force résultante.

Corrigé

Résultante $= 80 - 50 = 30$ N, dirigée vers la droite (sens de la plus grande des deux forces).

Exercice 8

Sur un schéma, $A(1\,;\, 1)$, $B(4\,;\, 5)$, $C(9\,;\, 5)$. Calculer les composantes de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$. Vérifier la relation $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Corrigé

$\overrightarrow{AB} = (3\,;\, 4)$; $\overrightarrow{BC} = (5\,;\, 0)$; $\overrightarrow{AC} = (8\,;\, 4)$.
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (3 + 5\,;\, 4 + 0) = (8\,;\, 4) = \overrightarrow{AC}$. La relation est vérifiée.

Pour aller plus loin

Exercice 9

Un objet est soumis à deux forces perpendiculaires : $F_1 = 12$ N horizontalement et $F_2 = 5$ N verticalement. Calculer la valeur et la direction (angle avec l'horizontale) de la force résultante.

Corrigé

$\|\overrightarrow{F}\| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ N.
$\tan\theta = \dfrac{5}{12} \approx 0{,}417$, donc $\theta \approx 22{,}6°$.

Exercice 10

Soient $\overrightarrow{u} = (4\,;\,3)$ et $\overrightarrow{v} = (-1\,;\,2)$. Calculer la norme de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

Corrigé

$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (3\,;\,5)$, donc $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34} \approx 5{,}83$.

Exercice 11

Un vecteur $\overrightarrow{u}$ a une norme $\|\overrightarrow{u}\| = 10$ et fait un angle $\theta = 30°$ avec l'axe horizontal. Calculer ses composantes x et y (rappel : $x = \|\overrightarrow{u}\|\cos\theta$, $y = \|\overrightarrow{u}\|\sin\theta$).

Corrigé

$x = 10 \times \cos 30° \approx 10 \times 0{,}866 \approx 8{,}66$.
$y = 10 \times \sin 30° = 10 \times 0{,}5 = 5$.
Donc $\overrightarrow{u} \approx (8{,}66\,;\,5)$.

Exercice 12

Deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ont pour composantes $(2\,;\,3)$ et $(5\,;\,-1)$ respectivement. Calculer les composantes de $\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}$ (rappel : $-\overrightarrow{u_2}$ a pour composantes $(-x_2\,;\,-y_2)$).

Corrigé

$\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} = (2-5\,;\,3-(-1)) = (-3\,;\,4)$.
Norme : $\sqrt{9+16} = 5$.

Activités d'application

Activité 1 • Composition de deux courants en quadrature ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *somme de vecteurs, norme* ***Lien référentiel :*** *S2.1 — représentation vectorielle des grandeurs alternatives*

Dans un circuit en régime alternatif, on représente deux courants par des vecteurs dans un plan : un courant actif $\overrightarrow{I_a}$ porté par l'axe horizontal et un courant réactif $\overrightarrow{I_r}$ porté par l'axe vertical (les deux sont *en quadrature*). On donne $\overrightarrow{I_a} = (3\,;\,0)$ A et $\overrightarrow{I_r} = (0\,;\,4)$ A.

1. Donner les composantes du courant total $\overrightarrow{I} = \overrightarrow{I_a} + \overrightarrow{I_r}$.
2. Calculer la norme $\|\overrightarrow{I}\|$: c'est l'intensité totale du courant lue par un ampèremètre.

Corrigé

1. $\overrightarrow{I} = (3\,;\,4)$ A.
2. $\|\overrightarrow{I}\| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$ A.

Activité 2 • Moment de serrage d'une borne ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *produit, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :*** *S3.3 — raccordements et serrages*

Le moment d'une force par rapport à un axe vaut $M = F \times d$, où d est le bras de levier. On serre la vis d'une borne avec une clé : la force appliquée est $F = 150$ N et le bras de levier $d = 0{,}2$ m.

1. Calculer le moment de serrage M (en N·m).
2. Pour atteindre $M = 45$ N · m avec la même force, calculer le bras de levier nécessaire. (isoler d)

Corrigé

1. $M = 150 \times 0{,}2 = 30$ N · m.
2. $d = \dfrac{M}{F} = \dfrac{45}{150} = 0{,}3$ m.

Activité 3 • Vecteur entre deux points d'un schéma ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *composantes, norme* ***Lien référentiel :*** *S3.1 — lecture de plans et schémas*

Sur un schéma d'implantation, deux points sont repérés par leurs coordonnées (en mm) : $A(10\,;\,20)$ et $B(40\,;\,60)$.

1. Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (rappel : $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,;\,y_B - y_A)$).
2. Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$: c'est la distance entre les deux points.

Corrigé

1. $\overrightarrow{AB} = (40 - 10\,;\,60 - 20) = (30\,;\,40)$.
2. $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{30^2+40^2} = \sqrt{2\,500} = 50$ mm.

Activité 4 • Vecteur vitesse d'avance d'un outil sur deux axes ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *norme, direction* ***Lien référentiel :*** *S3.4 — machines à commande numérique en atelier électrotechnique*

Sur une machine à percer commandée numériquement, la tête d'outil avance simultanément suivant deux axes. Sa vitesse a pour composantes $v_x = 600$ mm/min et $v_y = 800$ mm/min.

1. Calculer la norme du vecteur vitesse (vitesse résultante de l'outil).
2. Déterminer l'angle θ que fait ce vecteur avec l'axe X (on utilisera $\tan\theta = v_y/v_x$).

Corrigé

1. $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{600^2+800^2} = \sqrt{1\,000\,000} = 1\,000$ mm/min.
2. $\tan\theta = \dfrac{800}{600} \approx 1{,}33$, donc $\theta \approx 53°$.

Activité 5 • Composition de deux vitesses PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *somme de vecteurs, norme* ***Lien référentiel :*** *S15 — composition des vitesses*

Un nageur traverse une rivière. Il nage à 4 m/s perpendiculairement à la berge, tandis que le courant l'emporte à 3 m/s le long de la rivière.

1. Calculer la norme de la vitesse réelle du nageur.
2. Calculer l'angle de sa trajectoire par rapport à la direction où il nage ($\tan\theta = 3/4$).

Corrigé

1. $\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ m/s.
2. $\tan\theta = 0{,}75$, donc $\theta \approx 37°$.

Activité 6 • Poussée d'Archimède : forces verticales opposées PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *somme de vecteurs colinéaires, signe* ***Lien référentiel :*** *S15 — statique des fluides*

Un objet plongé dans l'eau subit deux forces verticales opposées : son poids $P = 50$ N (vers le bas) et la poussée d'Archimède $F_A = 30$ N (vers le haut).

1. Calculer la valeur de la force résultante et préciser son sens.
2. En déduire si l'objet coule ou remonte.

Corrigé

1. $R = 50 - 30 = 20$ N, dirigée vers le bas.
2. La résultante est vers le bas : l'objet coule.

Chapitre 5

Semaine 5 : Fonctions et lecture graphique

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) des exercices classiques d'application directe (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte Électrotech, qui réinvestissent ces notions dans des situations métier.

Rappel mathématique

Cette semaine consolide les outils pour décrire et interpréter une dépendance entre deux grandeurs : fonction linéaire, fonction affine, fonction carré, et lecture graphique. Ces outils permettent de modéliser un grand nombre de situations métier (loi d'Ohm, dilatation, débit, étalonnage de capteur).

§1. Notion de fonction

Définition – fonction

Une fonction f associe à chaque valeur x (la variable) une unique valeur $f(x)$ (l'image de x). La représentation graphique de f est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;\,f(x))$.

Exemple – Pour $f(x) = 2x + 1$, *on a* $f(0) = 1$, $f(3) = 7$, $f(-2) = -3$.

§2. Fonction linéaire

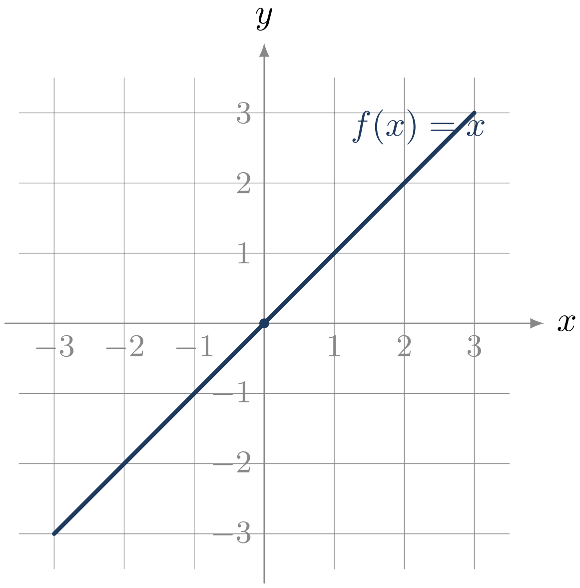
Définition – fonction linéaire

Une fonction linéaire est de la forme $f(x) = k\,x$, où k est un coefficient constant. Sa représentation graphique est une droite passant par l'origine.

Propriété – proportionnalité

Une fonction linéaire $f(x) = k\,x$ traduit une situation de **proportionnalité** entre x et $f(x)$, de coefficient k. Sur la droite, k est le *coefficient directeur* (la pente).

Exemple – Pour la loi d'Ohm $U = RI$, *la tension* U *est une fonction linéaire de l'intensité* I, *de pente* R *(la résistance).*



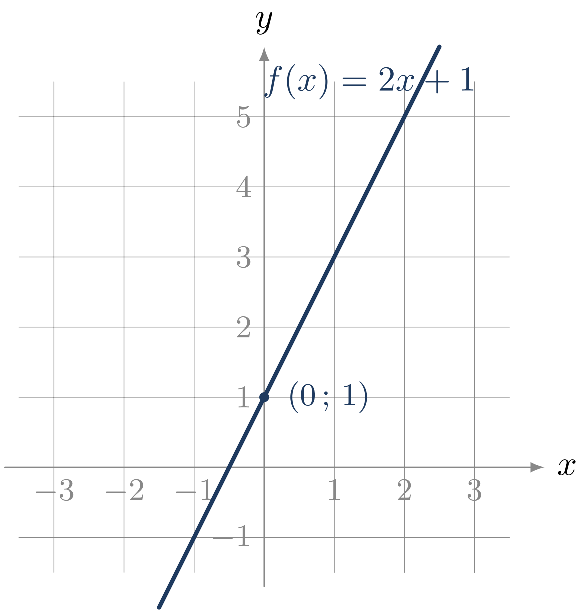
§3. Fonction affine

Définition – fonction affine

Une fonction affine est de la forme $f(x) = a\,x + b$, où a est le coefficient directeur (pente) et b l'ordonnée à l'origine. Sa représentation graphique est une droite, qui passe par le point $(0\,;\,b)$.

Si $b = 0$, la fonction est linéaire ; on retrouve le cas précédent.

Exemple – Pour $f(x) = 3x + 2$ *:* $f(0) = 2$, $f(1) = 5$. *La droite passe par* $(0\,;\,2)$ *et a pour pente* 3.



Méthode – calculer la pente entre deux points

Pour une droite passant par les points $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ (avec $x_A \neq x_B$), la pente vaut

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\,.$$

§4. Fonction carré

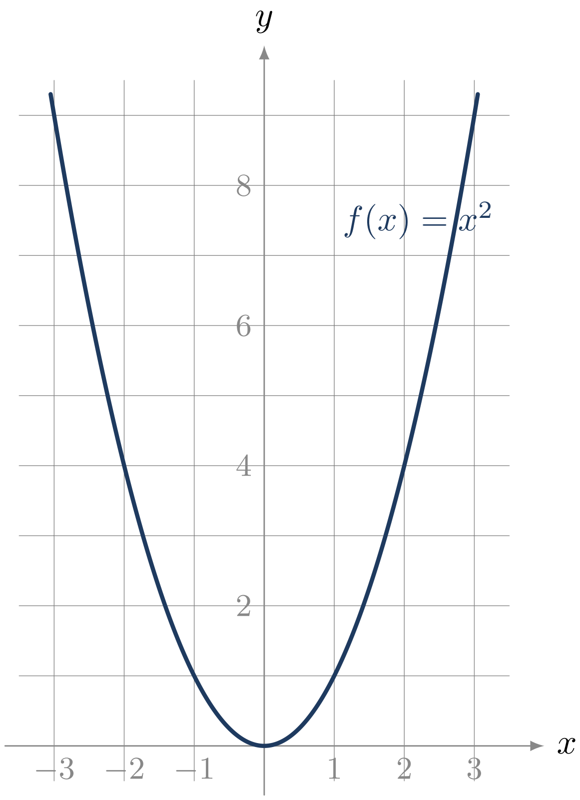
Définition – fonction carré

La fonction carré est définie par $f(x) = x^2$. Pour $a \neq 0$, on appelle parfois ainsi toute fonction de la forme $f(x) = a\,x^2$.

Propriété – effet du carré

Si l'on multiplie la variable par 2, l'image est multipliée par $2^2 = 4$. Plus généralement, multiplier par k multiplie l'image par k^2.

Exemple – Pour $f(x) = x^2$: $f(2) = 4$, $f(4) = 16$ (quatre fois plus pour une variable doublée). C'est la signature visuelle d'une dépendance en carré.



Cas métier. La puissance dissipée par effet Joule $P = R\,I^2$ est une fonction carré de l'intensité : doubler I quadruple la puissance.

§5. Lecture graphique

Méthode – lire une courbe

Pour exploiter une représentation graphique :

- **Image d'une valeur** : pour lire $f(a)$, on repère a sur l'axe des abscisses, on monte verticalement jusqu'à la courbe, puis horizontalement jusqu'à l'axe des ordonnées.
- **Antécédent** : pour trouver les valeurs x telles que $f(x) = c$, on repère c sur l'axe des ordonnées, on va horizontalement jusqu'à la courbe, puis verticalement jusqu'à l'axe des abscisses.
- **Point d'intersection** : entre deux courbes, le point d'intersection donne une valeur de x pour laquelle les deux fonctions prennent la même valeur.

Exercices classiques

Les huit premiers sont à traiter en priorité ; les quatre suivants, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Soit la fonction $f(x) = 2x + 5$. Calculer $f(0)$, $f(3)$, $f(-2)$.

Corrigé

$f(0) = 5$; $f(3) = 6 + 5 = 11$; $f(-2) = -4 + 5 = 1$.

Exercice 2

Pour la fonction linéaire $f(x) = 4x$, compléter le tableau et vérifier qu'il s'agit bien d'une situation de proportionnalité.

x	0	1	2	3
$f(x)$				

Corrigé

$f(0) = 0$, $f(1) = 4$, $f(2) = 8$, $f(3) = 12$. Le rapport $f(x)/x$ vaut 4 pour toutes les valeurs non nulles : c'est bien une situation de proportionnalité de coefficient 4.

Exercice 3

Soit la fonction affine $f(x) = 3x - 1$. Calculer $f(0)$, $f(2)$ et $f(4)$. Vérifier ensuite la pente entre les points $(2\,;\,f(2))$ et $(4\,;\,f(4))$.

Corrigé

$f(0) = -1$; $f(2) = 5$; $f(4) = 11$.

Pente $= \dfrac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \dfrac{11 - 5}{2} = 3$. C'est bien le coefficient directeur de la fonction.

Exercice 4

Une droite passe par les points $A(1\,;\,2)$ et $B(5\,;\,10)$. Calculer son coefficient directeur, puis écrire l'équation de la droite $y = a\,x + b$.

Corrigé

$a = \dfrac{10-2}{5-1} = \dfrac{8}{4} = 2.$
On a $y = 2x + b$; en utilisant A : $2 = 2 \times 1 + b$, donc $b = 0$.
Équation : $y = 2x$.

Exercice 5

Soit la fonction carré $f(x) = x^2$. Calculer $f(2)$, $f(4)$, $f(8)$. Si l'on double la variable, par quel facteur l'image est-elle multipliée ?

Corrigé

$f(2) = 4$, $f(4) = 16$, $f(8) = 64$.
Doubler la variable multiplie l'image par 4 (signature du carré).

Exercice 6

Soit la fonction $f(x) = 5\,x^2$. Compléter le tableau de valeurs.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$					

Corrigé

$f(0) = 0$, $f(1) = 5$, $f(2) = 20$, $f(3) = 45$, $f(4) = 80$.

Exercice 7

Le tableau de valeurs ci-dessous est-il celui d'une fonction linéaire, affine, ou carré ?

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	5	7	9	11

Corrigé

Les valeurs augmentent de 2 à chaque fois (pas constant) : c'est une fonction affine. Pente $a = 2$, et $f(0) = 3$, donc $f(x) = 2x + 3$. Ce n'est pas une fonction linéaire car $f(0) \neq 0$.

Exercice 8

Sur un graphique, la droite représentative d'une fonction f passe par $(0\,;\,4)$ et $(2\,;\,0)$. En déduire l'expression de f.

Corrigé

Pente : $a = \dfrac{0-4}{2-0} = -2.$
Ordonnée à l'origine : $b = 4$.
Donc $f(x) = -2x + 4$.

Pour aller plus loin

Exercice 9

Une fonction f vérifie $f(x) = a\,x + b$ avec $f(2) = 7$ et $f(5) = 16$. Déterminer a et b.

Corrigé

$a = \dfrac{16-7}{5-2} = 3.$
$7 = 3 \times 2 + b$, donc $b = 1$.
Donc $f(x) = 3x + 1$.

Exercice 10

Deux droites ont pour équations $y = 2x + 1$ et $y = -x + 4$. Calculer le point d'intersection (résoudre $2x + 1 = -x + 4$).

Corrigé

$2x + 1 = -x + 4 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$.
$y = 2 \times 1 + 1 = 3$ (ou $y = -1 + 4 = 3$).
Point d'intersection : $(1\,;\,3)$.

Exercice 11

Soit $f(x) = x^2$. Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) = 49$?

Corrigé

$x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$ ou $x = -7$ (deux antécédents possibles).

Exercice 12

Lecture graphique. Sur un graphique non fourni ici, on lit que la droite passe par $(1\,;\,3)$ et $(4\,;\,9)$, et la parabole d'équation $y = x^2$ passe (notamment) par $(3\,;\,9)$. La droite et la parabole se coupent en deux points. En partant des équations, calculer les abscisses de ces deux points d'intersection.

Corrigé

Pente de la droite : $a = \dfrac{9-3}{4-1} = 2$. Avec $3 = 2 \times 1 + b$, on a $b = 1$, donc $y = 2x + 1$.
Intersection avec $y = x^2$: $x^2 = 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$.
$\Delta = 4 + 4 = 8$, donc $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$, soit $x \approx 2{,}41$ ou $x \approx -0{,}41$.

Activités d'application

Activité 1 • Décharge d'une batterie (fonction affine) — ÉLECTROTECHNIQUE

***Outil réinvesti :** fonction affine, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :** S2.2 — accumulateurs et batteries*

La tension aux bornes d'une batterie qui se décharge à courant constant suit une loi affine : $U(t) = U_0 - k\,t$, où U_0 est la tension initiale et k la vitesse de chute (en V/min). On donne $U_0 = 12$ V et $k = 0{,}1$ V/min.

1. Calculer U au bout de $t = 20$ min.

2. À quel instant t la tension atteint-elle $U = 9$ V ? (isoler t)

Corrigé

1. $U = 12 - 0{,}1 \times 20 = 12 - 2 = 10$ V.
2. $9 = 12 - 0{,}1\,t \Rightarrow 0{,}1\,t = 3 \Rightarrow t = 30$ min.

Activité 2 • Caractéristique d'un conducteur ohmique (fonction linéaire) ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *proportionnalité, lecture de tableau, pente* ***Lien référentiel :*** *S2.1 — loi d'Ohm, caractéristique $U(I)$*

Pour différents courants I, on mesure la tension U aux bornes d'une résistance :

I (A)	0	1	2	3
U (V)	0	5	10	15

1. Calculer le rapport U/I pour chaque mesure non nulle. Que remarque-t-on ?
2. En déduire la valeur de la résistance R (la pente de la droite $U = R\,I$).

Corrigé

1. $\dfrac{5}{1} = \dfrac{10}{2} = \dfrac{15}{3} = 5$: le rapport est constant.
2. $R = 5\ \Omega$.

Activité 3 • Effet Joule en fonction de l'intensité (fonction carré) ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *fonction carré, tableau de valeurs* ***Lien référentiel :*** *S2.1 — pertes par effet Joule*

La puissance dissipée par effet Joule dans une résistance $R = 10\ \Omega$ est $P = R\,I^2 = 10\,I^2$.

1. Compléter le tableau de P pour $I = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ A.
2. Si l'on double l'intensité, par combien la puissance est-elle multipliée ? Justifier.

Corrigé

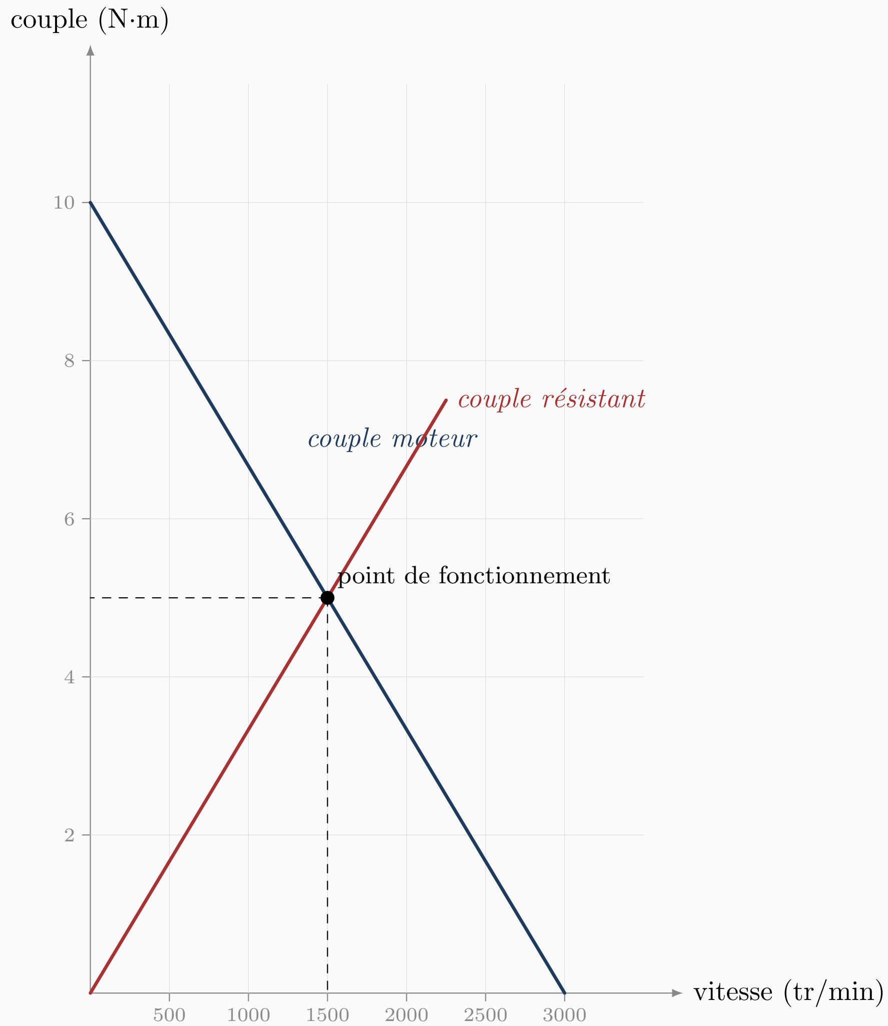
I (A)	0	1	2	3	4
P (W)	0	10	40	90	160

Doubler I multiplie P par $2^2 = 4$ (par exemple de 10 à 40 entre $I = 1$ et $I = 2$) : c'est la signature de la fonction carré.

Activité 4 • Lecture d'une caractéristique de moteur ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *lecture graphique, point de fonctionnement* ***Lien référentiel :*** *S2.2 — moteurs électriques, caractéristiques*

La courbe ci-dessous représente la caractéristique couple–vitesse d'un moteur électrique. La droite décroissante donne le couple disponible du moteur en fonction de sa vitesse de rotation ; la droite croissante donne le couple résistant exigé par la charge entraînée. Le *point de fonctionnement* est leur intersection.



1. Lire les coordonnées du point de fonctionnement (vitesse en tr/min, couple en N·m).
2. Quel est le couple disponible quand le moteur est à l'arrêt (vitesse nulle) ? On l'appelle le *couple de démarrage.*
3. Pour quelle vitesse le couple disponible devient-il nul ? On l'appelle la *vitesse à vide.*

Corrigé

1. Point de fonctionnement : vitesse $\approx 1\,500$ tr/min, couple $\approx 5\ \mathrm{N\cdot m}$.
2. À vitesse nulle, le couple disponible vaut $10\ \mathrm{N\cdot m}$: c'est le couple de démarrage.
3. Le couple disponible devient nul vers $3\,000$ tr/min : c'est la vitesse à vide.

Activité 5 • Étalonnage d'un capteur (fonction linéaire) PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *proportionnalité, lecture graphique, pente* ***Lien référentiel :*** *S15 — mesure et instrumentation*

On étalonne un capteur de température en relevant sa tension de sortie U pour différentes températures T :

T (°C)	0	20	40	60	80
U (mV)	0	100	200	300	400

1. Calculer le rapport U/T pour les mesures non nulles. Que constate-t-on ?

2. En déduire la sensibilité du capteur (en mV par °C), puis prédire la tension obtenue à $T = 100$ °C.

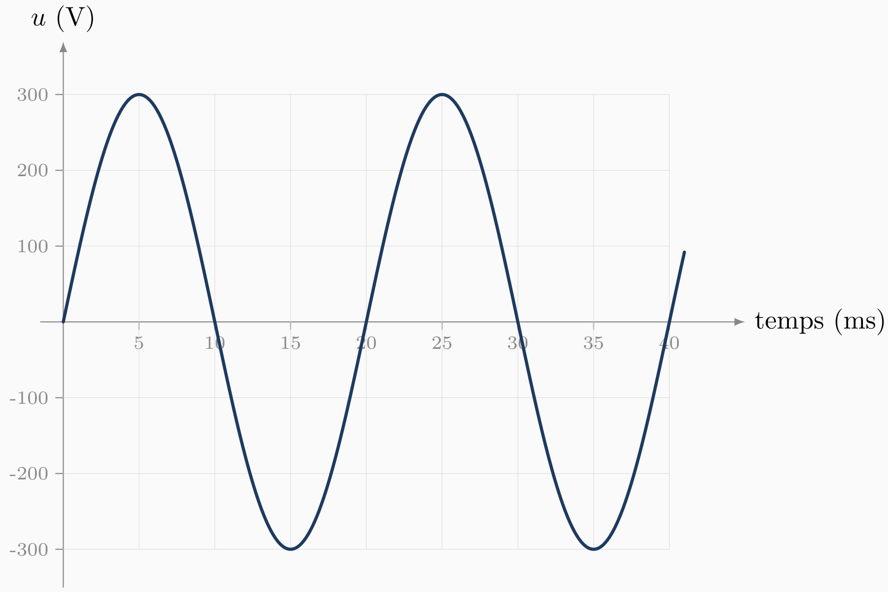
Corrigé

1. $\dfrac{100}{20} = \dfrac{200}{40} = \dfrac{300}{60} = \dfrac{400}{80} = 5$: le rapport est constant.
2. Sensibilité $= 5$ mV/°C. Pour $T = 100$ °C : $U = 5 \times 100 = 500$ mV.

Activité 6 • Lecture d'un oscillogramme (signal sinusoïdal) — PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *lecture graphique, période et fréquence* ***Lien référentiel :*** *S15 — Électricité (grandeurs alternatives)*

L'oscillogramme ci-dessous représente une tension alternative en fonction du temps.



1. Lire l'amplitude (valeur de crête) de la tension.
2. Lire la durée d'un cycle complet (la période T), puis calculer la fréquence f (rappel : $f = 1/T$).

Corrigé

1. Amplitude $= 300$ V.
2. $T = 20$ ms $= 0{,}020$ s, donc $f = \dfrac{1}{0{,}020} = 50$ Hz.

Chapitre 6

Semaine 6 : Dérivation

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) des exercices classiques d'application directe (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte Électrotech, qui réinvestissent ces notions dans des situations métier.

Rappel mathématique

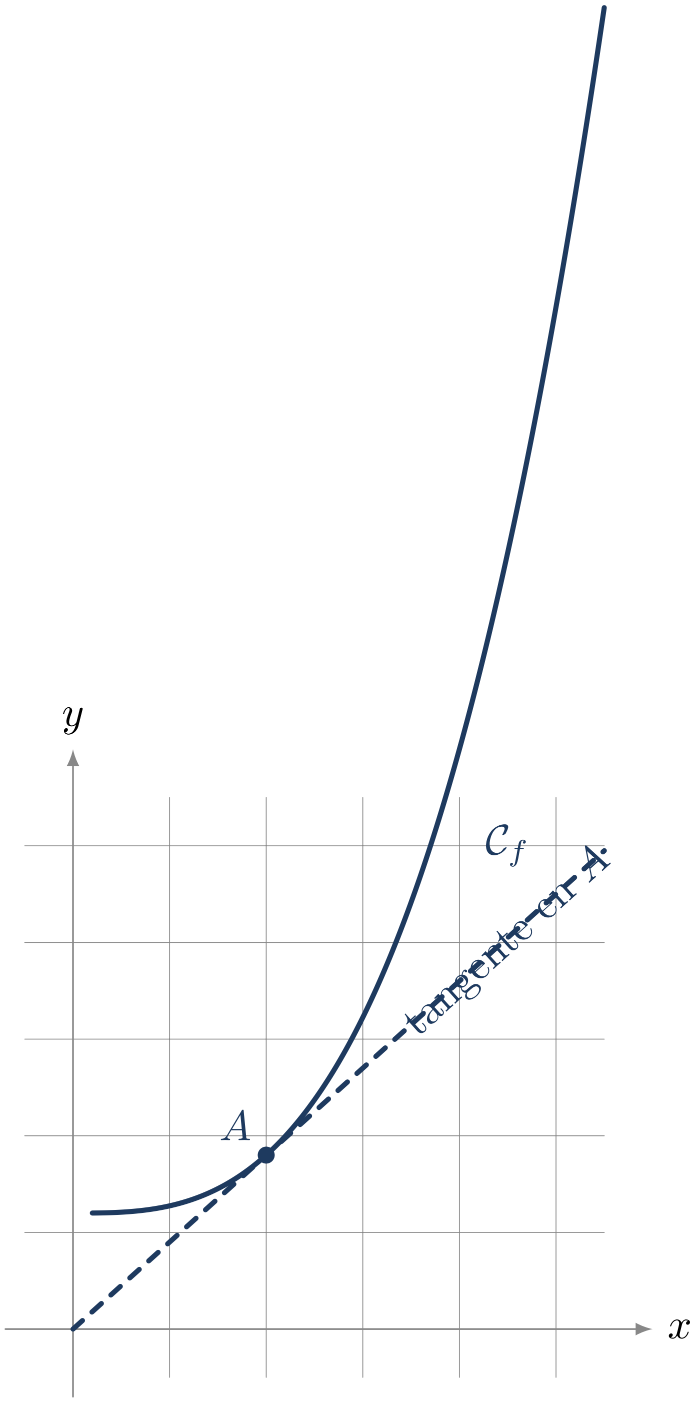
Cette semaine consolide la notion de dérivée d'une fonction et son interprétation comme taux de variation. La dérivation est l'outil de la première année de BTS pour étudier les variations, identifier les extremums et modéliser des grandeurs qui évoluent (vitesse, courant, débit).

§1. Nombre dérivé et tangente

Définition – nombre dérivé

Le *nombre dérivé* d'une fonction f en un point d'abscisse a, noté $f'(a)$, est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe représentative de f au point $(a\,;\,f(a))$.

C'est aussi le *taux de variation instantané* de f en a : il indique à quelle vitesse f change autour de cette valeur.



§2. Fonction dérivée

Définition – fonction dérivée

La fonction dérivée de f, notée f', associe à chaque x son nombre dérivé $f'(x)$ (lorsqu'il existe).

Propriété – dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
k (constante)	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	$n\,x^{n-1}$

Exemple – *Si* $f(x) = x^5$, *alors* $f'(x) = 5\,x^4$.

§3. Règles de dérivation

Propriété – opérations sur les dérivées

Pour deux fonctions u et v et un réel k :

$$(k\,u)' = k\,u'\,, \quad (u+v)' = u' + v'\,, \quad (u-v)' = u' - v'\,.$$

Ces règles permettent de dériver tous les *polynômes*.

Exemple – *Si* $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$, *alors* $f'(x) = 3 \times 2x - 5 \times 1 + 0 = 6x - 5$.

Exemple – *Si* $g(t) = t^2 + 3t$, *alors* $g'(t) = 2t + 3$.

Point de vigilance. La dérivée d'une constante est nulle : pour $f(x) = 4$, on a $f'(x) = 0$, et non 4.

§4. Interprétation : taux de variation

Méthode – interpréter f'

La dérivée $f'(a)$ donne le **taux de variation instantané** de f en a.

- Si $f'(a) > 0$, f est croissante autour de a.
- Si $f'(a) < 0$, f est décroissante autour de a.
- Si $f'(a) = 0$, la courbe a une tangente horizontale en a (souvent un *extremum*).

Exemple – *La position d'un objet mobile est* $x(t)$. *Sa vitesse instantanée est* $v(t) = x'(t)$.

Exemple – *La charge d'un condensateur est* $q(t)$. *Le courant qui le traverse est* $i(t) = q'(t)$.

§5. Optimisation : trouver un extremum

Méthode – rechercher un extremum

Pour trouver les valeurs de x où une fonction f admet un maximum ou un minimum :

1. On calcule $f'(x)$.
2. On résout $f'(x) = 0$.
3. On étudie le signe de $f'(x)$ autour des solutions trouvées pour conclure (minimum ou maximum).

Exemple – Soit $C(x) = x^2 - 6x + 10$. *On a* $C'(x) = 2x - 6$.
$C'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$. *Pour* $x < 3$, $C'(x) < 0$ *(décroissante) ; pour* $x > 3$, $C'(x) > 0$ *(croissante). Donc* C *admet un minimum en* $x = 3$, *et* $C(3) = 9 - 18 + 10 = 1$.

Exercices classiques

Les huit premiers sont à traiter en priorité ; les quatre suivants, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

- $f(x) = x^2$
- $f(x) = x^3$
- $f(x) = x^4$

Corrigé

$f'(x) = 2x$; $f'(x) = 3x^2$; $f'(x) = 4x^3$.

Exercice 2

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

- $f(x) = 5$
- $f(x) = 3x$
- $f(x) = 7x + 4$

Corrigé

$f'(x) = 0$; $f'(x) = 3$; $f'(x) = 7$.

Exercice 3

Soit $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$. Calculer $f'(x)$, puis $f'(2)$.

Corrigé

$f'(x) = 6x - 5$.
$f'(2) = 12 - 5 = 7$.

Exercice 4

Soit $g(t) = 2\,t^2 + 3\,t - 1$. Calculer $g'(t)$, puis $g'(0)$ et $g'(5)$.

Corrigé

$g'(t) = 4t + 3$.
$g'(0) = 3$; $g'(5) = 20 + 3 = 23$.

Exercice 5

Pour la fonction $f(x) = x^2$, calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 4$.

Corrigé

$f'(x) = 2x$, donc $f'(4) = 8$. C'est le coefficient directeur de la tangente.

Exercice 6

Soit $f(x) = -x^2 + 4x$. Calculer $f'(x)$, puis résoudre $f'(x) = 0$.

Corrigé

$f'(x) = -2x + 4$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Exercice 7

La position d'un objet mobile est donnée par $x(t) = t^2 + 2t$, avec t en secondes et x en mètres. Sa vitesse instantanée est $v(t) = x'(t)$.

- Calculer $v(t)$.
- Calculer la vitesse à $t = 5$ s.

Corrigé

$v(t) = 2t + 2$.
$v(5) = 10 + 2 = 12$ m/s.

Exercice 8

Soit $C(x) = x^2 - 8x + 20$ une fonction de coût. Déterminer la valeur de x qui minimise C, et calculer le coût minimal.

Corrigé

$C'(x) = 2x - 8$.
$C'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$.
Pour $x < 4$, $C'(x) < 0$ (décroissante) ; pour $x > 4$, $C'(x) > 0$ (croissante). Donc minimum en $x = 4$.
$C(4) = 16 - 32 + 20 = 4$.

Pour aller plus loin

Exercice 9

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$. Calculer $f'(x)$, puis résoudre $f'(x) = 0$.

Corrigé

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$.

Exercice 10

Soit $f(x) = x^2$. Écrire l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 3$ (rappel : équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$).

Corrigé

$f(3) = 9$; $f'(x) = 2x$, donc $f'(3) = 6$.
Équation : $y = 6(x - 3) + 9 = 6x - 18 + 9 = 6x - 9$.

Exercice 11

La charge d'un condensateur (en coulombs) suit $q(t) = 0{,}5\,t^2 + 2t$. Calculer le courant $i(t) = q'(t)$ qui le traverse, puis le courant à l'instant $t = 4$ s.

Corrigé

$i(t) = t + 2$.
$i(4) = 4 + 2 = 6$ A.

Exercice 12

Soit $f(x) = 2x^2 - 12x + 5$. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

Corrigé

$f'(x) = 4x - 12$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$.
Pour $x < 3$, $f'(x) < 0$ donc f est décroissante.
Pour $x > 3$, $f'(x) > 0$ donc f est croissante.
f admet un minimum en $x = 3$; $f(3) = 18 - 36 + 5 = -13$.

Activités d'application

Activité 1 • Tension induite (dérivation d'un polynôme) ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *dérivation d'un polynôme, taux de variation* ***Lien référentiel :*** *S2.2 — induction électromagnétique*

Le flux magnétique à travers une bobine (en webers) évolue selon $\Phi(t) = 0{,}5\,t^2 + 2\,t$, avec t en secondes. La tension induite aux bornes de la bobine se déduit par dérivation : sa valeur absolue vaut $e(t) = \Phi'(t)$.

1. Déterminer l'expression de $e(t)$.
2. Calculer la tension induite à l'instant $t = 3$ s.

Corrigé

1. $e(t) = \Phi'(t) = t + 2$ (en volts).
2. $e(3) = 3 + 2 = 5$ V.

Activité 2 • Nombre dérivé et tangente ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *nombre dérivé, coefficient directeur* ***Lien référentiel :*** *lecture d'une courbe, pente*

Soit la fonction $f(x) = x^2$. On rappelle que le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a.

1. Déterminer la fonction dérivée $f'(x)$.
2. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 3$.

Corrigé

1. $f'(x) = 2x$.
2. $f'(3) = 6$.

Activité 3 • Optimisation du coût d'une installation — ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *dérivation, signe de la dérivée, extremum* ***Lien référentiel :*** *S3.5 — estimation des coûts d'une installation*

Le coût total annuel d'une installation (matériel + pertes en énergie), exprimé en milliers d'euros, est modélisé par $C(x) = x^2 - 6x + 10$, où x est un paramètre de dimensionnement (par exemple la section choisie pour le câble principal). Un minimum est atteint là où la dérivée s'annule.

1. Calculer $C'(x)$, puis résoudre $C'(x) = 0$.
2. En déduire le dimensionnement x qui minimise le coût, et la valeur du coût minimal.

Corrigé

1. $C'(x) = 2x - 6$; $C'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$.
2. Pour $x = 3$: $C(3) = 9 - 18 + 10 = 1$. Coût minimal $= 1\,000$ € par an.

Activité 4 • Courant de charge d'un condensateur (taux de variation) — ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *dérivation d'un polynôme, taux de variation* ***Lien référentiel :*** *S2.1 — composants réactifs (condensateur)*

La charge q d'un condensateur en cours de charge (en coulombs) évolue selon $q(t) = t^2 + 3\,t$, avec t en secondes. Le courant qui le traverse à l'instant t est le taux de variation de la charge : $i(t) = q'(t)$.

1. Déterminer l'expression de $i(t)$.
2. Calculer le courant à l'instant $t = 4$ s.

Corrigé

1. $i(t) = q'(t) = 2t + 3$ (en ampères).
2. $i(4) = 8 + 3 = 11$ A.

Activité 5 • Vitesse d'un objet en chute — PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *dérivation d'un polynôme* ***Lien référentiel :*** *S15 — cinématique (chute)*

La distance parcourue par un objet en chute (en mètres) est approximativement $x(t) = 5\,t^2$, avec t en secondes. La vitesse est la dérivée de la position : $v(t) = x'(t)$.

1. Déterminer $v(t)$.
2. Calculer la vitesse à l'instant $t = 3$ s.

Corrigé

1. $v(t) = 10\,t$.
2. $v(3) = 30$ m/s.

Activité 6 • Vitesse de refroidissement PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *dérivation d'une fonction affine, signe* ***Lien référentiel :*** *S15 — thermique*

La température d'une pièce qui refroidit (en °C) suit $T(t) = 80 - 5\,t$, avec t en minutes.

1. Calculer $T'(t)$.
2. Interpréter le signe et la valeur du résultat.

Corrigé

1. $T'(t) = -5$ °C/min.
2. Le signe est négatif : la température diminue. La valeur indique une perte de 5 °C par minute.

Chapitre 7

Annexe : prise en main de la calculatrice

Cette annexe rassemble les gestes de calculatrice les plus utiles pour le parcours de consolidation. Elle s'appuie sur les deux modèles les plus répandus dans les lycées français : les Casio scientifiques (fx-92, Graph 25, Graph 35) et la Numworks. Les gestes décrits ici sont des acquis attendus du collège ou de la seconde, mais l'expérience montre qu'ils méritent d'être rappelés en début de BTS.

§1 — Choisir l'unité d'angle (degré ou radian)

En consolidation, on travaille en **degrés** : un angle droit vaut 90°, et c'est dans cette unité que sont donnés tous les énoncés de ce cahier. Avant tout calcul de sinus, cosinus ou tangente, il faut vérifier que la calculatrice est bien réglée en mode degré.

Sur Casio *(fx-92, Graph 25/35)*

Taper `SHIFT` puis `SETUP` (ou `MENU` puis `SETUP` selon le modèle). Choisir `Angle Unit`, puis `Degré (D)`. À l'écran, un petit `D` s'affiche en haut. Si l'on voit `R` (radian) ou `G` (grade), on n'est pas en degré.

Sur Numworks

Appuyer sur `Réglages`, puis `Forme des angles`, puis sélectionner `Degré`. L'indication apparaît en haut de l'écran principal.

Vérification

Taper sin(30) et valider. Si le résultat est 0,5, on est bien en degré. Si l'on obtient $-0{,}988$, on est en radian : il faut basculer.

§2 — La touche π

Toutes les calculatrices ont une touche dédiée pour π. **On ne saisit jamais 3,14 à la place :** on perd en précision pour rien, et c'est plus long à taper. La touche π donne la valeur la plus précise que la calculatrice connaît.

Sur Casio *(fx-92, Graph 25/35)*

La touche π est au-dessus de la touche `EXP` (ou $\times 10^x$), accessible via `SHIFT`.

Sur Numworks

La touche π est directement accessible sur le clavier, sans `SHIFT`.

Vérification

Taper π et valider. On doit lire 3,14159... (et non 3,14).

§3 — Puissances et racines

Pour saisir une puissance, on utilise la touche x^y (notée parfois $\wedge$). La racine carrée a sa propre touche $\sqrt{\ }$.

Sur Casio *(fx-92, Graph 25/35)*

Pour 2^{10} : taper `2`, puis x^y (ou $\wedge$), puis `10`, puis `=`. Résultat : 1 024.
Pour $\sqrt{50}$: taper $\sqrt{\ }$, puis `50`, puis `=`.

Sur Numworks

Pour 2^{10} : taper `2`, puis $\wedge$, puis `10`, puis `EXE`.
Pour $\sqrt{50}$: utiliser la touche $\sqrt{\ }$, puis saisir le contenu.

Attention au signe moins : pour saisir un exposant négatif comme 10^{-3}, on utilise la touche du *signe* négatif (souvent notée `(-)`), pas celle de la soustraction. Voir §4.

§4 — Notation scientifique : la touche `EXP`

Pour saisir un nombre en notation scientifique, comme $3{,}14 \times 10^{-6}$, on utilise la touche `EXP` (notée parfois `EE` ou $\times 10^x$). Cette touche signifie « fois dix puissance », il ne faut donc **pas** taper $\times$ `10` avant.

Sur Casio *(fx-92, Graph 25/35)*

Pour saisir $3{,}14 \times 10^{-6}$: taper `3.14`, puis `EXP`, puis `(-)`, puis `6`.
La séquence `3.14` $\times$ `10 EXP -6` est *fausse* : elle donne $3{,}14 \times 10 \times 10^{-6} = 3{,}14 \times 10^{-5}$.

Sur Numworks

Numworks utilise plutôt la notation naturelle. Pour saisir $3{,}14 \times 10^{-6}$, on peut soit taper la formule en clair (`3.14*10^(-6)`), soit utiliser la touche $\times 10^n$ dédiée.

Vérification

Taper 10^{-3}. On doit obtenir 0,001 (et non -1000, qui serait le résultat d'une mauvaise saisie du signe).

§5 — Lire un résultat en notation scientifique

Quand un résultat est très grand ou très petit, la calculatrice l'affiche en notation scientifique. Par exemple, $3{,}14 \times 10^{-6}$ peut s'afficher `3.14E-06` ou `3.14`$\times 10^{-6}$ selon le modèle.

Sur Casio *(fx-92, Graph 25/35)*

L'affichage par défaut est `3.14E-06`. Le `E` signifie « $\times 10^{\cdots}$ ». On peut basculer entre `Norm` (notation normale) et `Sci` (notation scientifique systématique) dans `SETUP`.

Sur Numworks

L'affichage utilise directement la notation $3{,}14 \cdot 10^{-6}$, plus lisible. Pas de risque de confusion avec une variable `E`.

Dans une copie ou un compte-rendu, on retranscrit toujours en notation mathématique propre : $3{,}14 \times 10^{-6}$, jamais `3.14E-06`.

§6 — Forme exacte ou valeur décimale

Les calculatrices récentes affichent par défaut les résultats sous **forme exacte** : un résultat avec π, une fraction non simplifiée, ou une racine carrée restent tels quels. Pour obtenir la valeur décimale approchée, on utilise la touche `S↔D` (Standard ↔ Décimal).

Sur Casio *(fx-92, Graph 25/35)*

Calculer $400 \times \pi$ donne `400`π à l'écran. Appuyer sur `S↔D` pour obtenir $1\,256{,}637\ldots$

Sur Numworks

Le résultat exact et la valeur approchée s'affichent souvent ensemble. On peut basculer entre les deux formes avec la touche dédiée.

Quel format choisir ? La forme exacte est précieuse pour comparer deux résultats ou pour les calculs en chaîne (pas d'arrondi cumulé). La valeur décimale est nécessaire pour interpréter physiquement un résultat (« la vitesse vaut environ 125,7 m/min »).

§7 — Calculs en chaîne : la touche `Ans`

Quand on enchaîne plusieurs calculs en réutilisant le résultat précédent, on **ne retape pas** le nombre à la main : on utilise la touche `Ans` (Answer), qui rappelle automatiquement le dernier résultat. Cela évite les erreurs de saisie et les arrondis.

Sur Casio *(fx-92, Graph 25/35)*

Après un calcul, taper directement `+`, `-`, × ou ÷ : la calculatrice insère `Ans` automatiquement. On peut aussi insérer `Ans` explicitement avec `SHIFT` puis `Ans`.

Sur Numworks

La touche `Ans` est directement accessible. Le résultat précédent est mémorisé après chaque `EXE`.

Exemple. Calculer $V = \pi \times 10^2 \times 100$, puis en déduire la masse $m = 7{,}85 \times V \times 10^{-3}$ (en grammes). Plutôt que de noter le résultat de V et le retaper, on enchaîne avec × `7.85` × `10^(-3)`.

§8 — Trigonométrie inverse

Pour retrouver un angle à partir de son sinus, son cosinus ou sa tangente, on utilise les fonctions inverses $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ (souvent notées `ASIN`, `ACOS`, `ATAN`).

Sur Casio *(fx-92, Graph 25/35)*

Pour obtenir l'angle dont la tangente vaut 0,75 : taper `SHIFT`, puis `tan`, puis `0.75`, puis `=`. En mode degré, on obtient 36,87°.

Sur Numworks

Les fonctions inverses sont accessibles via `shift` puis la fonction trigonométrique correspondante. Le résultat est dans l'unité d'angle active (degré ou radian).

Très important : l'unité du résultat dépend du mode actif. Si la calculatrice est en degré, $\tan^{-1}(0{,}75) \approx 36{,}87°$. Si elle est en radian, le même calcul donne 0,6435 rad. Toujours vérifier le mode avant un calcul de trigonométrie inverse (voir §1).

Vérification

En mode degré : $\tan^{-1}(1)$ doit donner 45°. Si l'on obtient $0{,}785\ldots$, on est en radian.