



Lycée Jean-Baptiste de Baudre
Agen

Parcours de consolidation en mathématiques

Semaine 4 • extrait du parcours complet

Cahier d'approfondissement

Spécialité CPI — Conception des Produits Industriels

Version professeur

(énoncés et corrigés)

De la rentrée aux vacances de la Toussaint

Semaine 4 : Vecteurs

Ce chapitre prolonge le cahier principal. Il se compose de deux parties : (a) des exercices classiques supplémentaires (tronc commun aux quatre BTS), (b) des activités d'application en contexte métier plus complètes, qui enchaînent davantage d'étapes.

Exercices classiques (suite)

Ces exercices prolongent les deux exercices du cahier de base. Ils enchaînent plusieurs notions et demandent une étape de raisonnement supplémentaire. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. Les quatre derniers, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Un câble tire une charge avec une force de 400 N, selon une direction faisant un angle de 25° au-dessus de l'horizontale.

1. Calculer les composantes horizontale et verticale de cette force (arrondir au dixième).
2. Vérifier, à partir de ces composantes, que la norme retrouvée vaut bien 400 N.
3. Retrouver l'angle de 25° à partir des composantes calculées.
4. On souhaite que la composante verticale atteigne 200 N, sans changer l'intensité de 400 N. Quel angle faut-il donner au câble ?

Corrigé

- 1) $x = 400 \times \cos 25^\circ \approx 400 \times 0,9063 \approx 362,5$ N ; $y = 400 \times \sin 25^\circ \approx 400 \times 0,4226 \approx 169,0$ N.
- 2) $\sqrt{362,5^2 + 169,0^2} = \sqrt{131\,406 + 28\,561} = \sqrt{159\,967} \approx 400,0$ N. ✓
- 3) $\tan \theta = \frac{169,0}{362,5} \approx 0,4662$, donc $\theta = \tan^{-1}(0,4662) \approx 25,0^\circ$. ✓
- 4) Il faut $400 \times \sin \theta = 200$, soit $\sin \theta = 0,5$, donc $\theta = 30^\circ$.

Exercice 2

Deux forces s'appliquent en un même point d'une structure : $\vec{F}_1 = (60 ; 0)$ et $\vec{F}_2 = (0 ; 80)$, en newtons.

1. Calculer les composantes de la résultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, son intensité et son angle avec l'horizontale.
2. Un système est en équilibre lorsque la somme de toutes les forces est le vecteur nul. Déterminer les composantes de la force $\vec{F}_3$ qu'il faut ajouter pour équilibrer le point.
3. Calculer l'intensité de $\vec{F}_3$ et préciser sa direction par rapport à $\vec{R}$.
4. Vérifier par le calcul que $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ est bien le vecteur nul.

Corrigé

- 1) $\vec{R} = (60; 80)$, donc $\|\vec{R}\| = \sqrt{3\,600 + 6\,400} = \sqrt{10\,000} = 100 \text{ N}$ et $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{80}{60}\right) \approx 53,1^\circ$.
- 2) Il faut $\vec{R} + \vec{F}_3 = \vec{0}$, donc $\vec{F}_3 = -\vec{R} = (-60; -80)$.
- 3) $\|\vec{F}_3\| = \sqrt{3\,600 + 6\,400} = 100 \text{ N}$: même intensité que $\vec{R}$, même direction, mais sens opposé.
- 4) $(60 + 0 - 60; 0 + 80 - 80) = (0; 0)$. ✓

Exercice 3

Un drone de surveillance avance à 15 km/h vers le nord. Un vent latéral le pousse vers l'est à 6 km/h. On repère l'est par l'axe horizontal et le nord par l'axe vertical.

1. Écrire les composantes du vecteur vitesse propre du drone et du vecteur vitesse du vent, puis celles de la vitesse réelle.
2. Calculer la vitesse réelle du drone, en km/h (arrondir au centième).
3. Calculer l'angle de dérive, c'est-à-dire l'angle entre la trajectoire réelle et la direction du nord (arrondir au dixième de degré).
4. Au bout de 2 heures de vol, de combien de kilomètres le drone s'est-il écarté vers l'est de la trajectoire prévue ?

Corrigé

- 1) Vitesse propre : $(0; 15)$. Vent : $(6; 0)$. Vitesse réelle : $(6; 15)$.
- 2) $\sqrt{36 + 225} = \sqrt{261} \approx 16,16 \text{ km/h}$.
- 3) La dérive se mesure par rapport au nord, donc l'angle a pour tangente $\frac{6}{15} = 0,4$: $\theta = \tan^{-1}(0,4) \approx 21,8^\circ$.
- 4) La composante est vaut 6 km/h, donc en 2 heures l'écart est de $6 \times 2 = 12 \text{ km}$.

Exercice 4

On donne $\vec{u} = (2; 3)$ et $\vec{v} = (5; -1)$.

1. Calculer $\vec{u} + \vec{v}$ et sa norme (arrondir au centième).
2. Calculer $\vec{u} - \vec{v}$ et sa norme.
3. Calculer $\vec{v} - \vec{u}$ et sa norme, puis expliquer le lien avec la question précédente.
4. Vérifier que $(\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{u} - \vec{v})$ a pour composantes le double de celles de $\vec{u}$.

Corrigé

- 1) $\vec{u} + \vec{v} = (7; 2)$, de norme $\sqrt{49 + 4} = \sqrt{53} \approx 7,28$.
- 2) $\vec{u} - \vec{v} = (2 - 5; 3 - (-1)) = (-3; 4)$, de norme $\sqrt{9 + 16} = 5$.
- 3) $\vec{v} - \vec{u} = (3; -4)$, de norme 5 également. Les deux vecteurs sont opposés : mêmes direction et norme, sens contraires.
- 4) $(7; 2) + (-3; 4) = (4; 6)$, ce qui est bien le double de $(2; 3)$. ✓

Exercice 5

Un chariot est tiré horizontalement par deux câbles opposés : $F_1 = 80 \text{ N}$ vers la droite et $F_2 = 50 \text{ N}$ vers la gauche. On oriente l'axe horizontal vers la droite.

1. Affecter un signe à chaque force selon l'orientation de l'axe, puis calculer la résultante.

Préciser sa valeur et son sens.

2. Quelle force supplémentaire, et dans quel sens, faudrait-il appliquer pour immobiliser le chariot ?
3. Une charge de 500 N est suspendue à deux câbles verticaux qui exercent respectivement 300 N et 250 N vers le haut. Calculer la résultante verticale et préciser son sens.
4. La charge de la question précédente monte-t-elle, descend-elle, ou reste-t-elle immobile ? Justifier.

Corrigé

- 1) $F_1 = +80$ N et $F_2 = -50$ N, donc la résultante vaut $80 - 50 = +30$ N : 30 N vers la droite.
- 2) Il faudrait une force de 30 N vers la gauche, pour que la somme soit nulle.
- 3) En orientant l'axe vers le haut : $+300 + 250 - 500 = +50$ N, soit 50 N vers le haut.
- 4) La résultante n'est pas nulle et elle est dirigée vers le haut : la charge monte. Pour qu'elle reste immobile, il faudrait que les tensions totalisent exactement 500 N.

Exercice 6

Dans un repère orthonormé gradué en millimètres, on donne $A(2; 3)$ et $B(8; 11)$.

1. Calculer les composantes de $\overrightarrow{AB}$, puis la distance AB .
2. Calculer l'angle que fait $\overrightarrow{AB}$ avec l'axe horizontal (arrondir au dixième de degré).
3. Déterminer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$.
4. Calculer la distance AC et vérifier qu'elle vaut le double de AB . Expliquer pourquoi.

Corrigé

- 1) $\overrightarrow{AB} = (8 - 2; 11 - 3) = (6; 8)$, donc $AB = \sqrt{36 + 64} = 10$ mm.
- 2) $\tan \theta = \frac{8}{6} \approx 1,333$, donc $\theta \approx 53,1^\circ$.
- 3) $\overrightarrow{BC} = (6; 8)$ signifie que l'on ajoute 6 à l'abscisse de B et 8 à son ordonnée : $C(8 + 6; 11 + 8)$, soit $C(14; 19)$.
- 4) $\overrightarrow{AC} = (12; 16)$, donc $AC = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$ mm, soit bien le double. C'est logique : d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB}$, puisque les deux vecteurs sont identiques.

Pour aller plus loin

Exercice 7

Deux câbles tirent sur le même crochet : $\overrightarrow{F_1}$, d'intensité 300 N, est horizontale ; $\overrightarrow{F_2}$, d'intensité 200 N, fait un angle de 60° avec l'horizontale. Les deux forces ne sont pas perpendiculaires : on ne peut pas appliquer Pythagore directement.

1. Décomposer chacune des deux forces en composantes horizontale et verticale (arrondir au dixième).
2. En déduire les composantes de la résultante.
3. Calculer l'intensité de la résultante (arrondir au dixième).
4. Calculer l'angle que fait la résultante avec l'horizontale.

Corrigé

- 1) $\vec{F}_1 = (300; 0)$. Pour $\vec{F}_2$: $x = 200 \times \cos 60^\circ = 100,0$ N et $y = 200 \times \sin 60^\circ \approx 173,2$ N, donc $\vec{F}_2 \approx (100,0; 173,2)$.
- 2) $\vec{R} = (300 + 100,0; 0 + 173,2) = (400,0; 173,2)$.
- 3) $\|\vec{R}\| = \sqrt{160\,000 + 30\,000} = \sqrt{190\,000} \approx 435,9$ N. On remarque que ce n'est ni la somme 500 N, ni $\sqrt{300^2 + 200^2}$.
- 4) $\tan \theta = \frac{173,2}{400,0} \approx 0,4330$, donc $\theta \approx 23,4^\circ$.

Exercice 8

Une charge est levée par deux élingues symétriques attachées au même point. Chacune exerce une traction de 400 N : la première fait un angle de 60° avec l'horizontale vers la droite, la seconde 60° vers la gauche (soit 120° mesurés depuis l'axe horizontal orienté vers la droite).

1. Décomposer chacune des deux tractions en composantes (arrondir au centième).
2. Calculer les composantes de la résultante et commenter la composante horizontale.
3. En déduire le poids maximal, en newtons, que ce montage peut équilibrer.
4. On écarte davantage les élingues : chacune ne fait plus que 45° avec l'horizontale, toujours à 400 N. Calculer le nouveau poids équilibré et conclure sur l'effet de l'écartement.

Corrigé

- 1) Élingue de droite : $x = 400 \times \cos 60^\circ = 200,00$ N et $y = 400 \times \sin 60^\circ \approx 346,41$ N. Élingue de gauche : $x = -200,00$ N et $y \approx 346,41$ N.
- 2) $\vec{R} = (200,00 - 200,00; 346,41 + 346,41) = (0; 692,82)$. La composante horizontale est nulle : les deux élingues étant symétriques, leurs tirages latéraux se compensent exactement.
- 3) La résultante est verticale et vaut environ 692,8 N vers le haut : c'est le poids maximal équilibré par ce montage.
- 4) À 45° : $y = 400 \times \sin 45^\circ \approx 282,84$ N par élingue, soit 565,7 N au total. Plus les élingues sont écartées de la verticale, moins elles portent, alors que leur tension reste la même : une part croissante de l'effort part en tirage latéral.

Exercice 9

La tête d'une machine à commande numérique effectue trois déplacements successifs, exprimés en millimètres : $\vec{d}_1 = (40; 0)$, puis $\vec{d}_2 = (0; 30)$, puis $\vec{d}_3 = (-25; -10)$.

1. Calculer les composantes du déplacement résultant.
2. Calculer la distance à vol d'oiseau entre le point de départ et le point d'arrivée.
3. Calculer l'angle que fait le déplacement résultant avec l'axe horizontal (arrondir au dixième de degré).
4. Déterminer les composantes du déplacement de retour au point de départ, ainsi que sa longueur.

Corrigé

- 1) $(40 + 0 - 25; 0 + 30 - 10) = (15; 20)$.
- 2) $\sqrt{225 + 400} = \sqrt{625} = 25$ mm.
- 3) $\tan \theta = \frac{20}{15} \approx 1,333$, donc $\theta \approx 53,1^\circ$.
- 4) Le retour est le vecteur opposé : $(-15; -20)$, de longueur 25 mm également. On remarque que le trajet aller a mesuré $40 + 30 + \sqrt{625 + 100} \approx 96,9$ mm, pour un déplacement net de seulement 25 mm.

Exercice 10

En électrotechnique, deux tensions alternatives déphasées se représentent par des vecteurs. On considère $\vec{U}_1$, d'amplitude 230 V, porté par l'axe horizontal, et $\vec{U}_2$, d'amplitude 120 V, perpendiculaire au premier (déphasage de 90°).

1. Écrire les composantes de $\vec{U}_1$ et de $\vec{U}_2$.
2. Calculer les composantes de la tension totale $\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$.
3. Calculer l'amplitude de la tension totale (arrondir au dixième de volt). Comparer avec la somme $230 + 120$ et expliquer l'écart.
4. Calculer le déphasage de la tension totale par rapport à $\vec{U}_1$ (arrondir au dixième de degré).

Corrigé

- 1) $\vec{U}_1 = (230; 0)$ et $\vec{U}_2 = (0; 120)$.
- 2) $\vec{U} = (230; 120)$.
- 3) $\|\vec{U}\| = \sqrt{52\,900 + 14\,400} = \sqrt{67\,300} \approx 259,4$ V. C'est nettement inférieur à 350 V : des tensions déphasées ne s'additionnent pas comme des nombres, seule l'addition vectorielle est valable.
- 4) $\tan \varphi = \frac{120}{230} \approx 0,5217$, donc $\varphi = \tan^{-1}(0,5217) \approx 27,6^\circ$.