



Lycée Jean-Baptiste de Baudre  
Agen

# Parcours de consolidation en mathématiques

*Semaine 5 • extrait du parcours complet*

**Cahier d'approfondissement**

*Spécialité CPI — Conception des Produits Industriels*

**Version professeur**

(énoncés et corrigés)

De la rentrée aux vacances de la Toussaint

# Semaine 5 : Fonctions et lecture graphique

Ce chapitre prolonge le cahier principal. Il se compose de deux parties : (a) des exercices classiques supplémentaires (tronc commun aux quatre BTS), (b) des activités d'application en contexte métier plus complètes, qui enchaînent davantage d'étapes.

## Exercices classiques (suite)

Ces exercices prolongent les deux exercices du cahier de base. Ils enchaînent plusieurs notions et demandent une étape de raisonnement supplémentaire. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. Les quatre derniers, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

### Exercice 1

On étalonne un capteur de température. Pour chaque température  $T$  (en  $^{\circ}\text{C}$ ), on relève la tension  $U$  délivrée (en mV).

|                            |     |     |     |     |
|----------------------------|-----|-----|-----|-----|
| $T$ ( $^{\circ}\text{C}$ ) | 0   | 20  | 40  | 60  |
| $U$ (mV)                   | 500 | 660 | 820 | 980 |

1. La tension  $U$  est-elle proportionnelle à la température  $T$  ? Justifier par un calcul de rapports.
2. Montrer que les écarts de tension sont proportionnels aux écarts de température, et calculer la pente  $a$  (en  $\text{mV}/^{\circ}\text{C}$ ).
3. En déduire l'expression de  $U$  en fonction de  $T$ , sous la forme  $U = aT + b$ .
4. Prévoir la tension délivrée pour  $T = 75^{\circ}\text{C}$ , puis déterminer la température correspondant à une tension de 900 mV.

### Corrigé

- 1)  $\frac{660}{20} = 33$  mais  $\frac{820}{40} = 20,5$  : les rapports ne sont pas égaux, donc  $U$  n'est *pas* proportionnelle à  $T$ . On le voit aussi sur la première colonne : pour  $T = 0$ , la tension vaut déjà 500 mV.
- 2) Quand  $T$  augmente de 20,  $U$  augmente de 160 à chaque fois. La pente vaut  $a = \frac{160}{20} = 8 \text{ mV}/^{\circ}\text{C}$ .
- 3) Pour  $T = 0$ , on lit  $U = 500$ , donc  $b = 500$  :  $U = 8T + 500$ .
- 4)  $U(75) = 8 \times 75 + 500 = 1100 \text{ mV}$ . Pour  $U = 900$  :  $8T + 500 = 900$ , donc  $8T = 400$  et  $T = 50^{\circ}\text{C}$ .

### Exercice 2

On reprend le graphique du §5. Il représente le niveau d'eau (en cm) dans deux cuves, en fonction du temps  $x$  (en minutes) : la cuve 1 se remplit (droite  $d_1$ ), la cuve 2 se vide (droite  $d_2$ ).

1. Lire le niveau initial de chaque cuve, puis donner la vitesse de remplissage de la cuve 1 et la vitesse de vidange de la cuve 2, en  $\text{cm}/\text{min}$ .

2. À quel instant les deux cuves sont-elles au même niveau, et quel est ce niveau ?
3. Sur quel intervalle de temps le niveau de la cuve 1 est-il inférieur à celui de la cuve 2 ? Répondre par lecture graphique.
4. À quel instant la cuve 2 est-elle vide ? Le graphique s'arrête à  $x = 8$  : calculer le niveau de la cuve 1 à  $x = 12$  minutes.

### Corrigé

- 1) Niveaux initiaux (à  $x = 0$ ) : 1 cm pour la cuve 1, 7 cm pour la cuve 2. La cuve 1 monte de 2 cm par minute ( $a_1 = 2$ ) ; la cuve 2 descend de 1 cm par minute ( $a_2 = -1$ ).
- 2) Au point d'intersection : à  $x = 2$  minutes, les deux niveaux valent 5 cm.
- 3) Avant l'intersection,  $d_1$  est sous  $d_2$  : le niveau de la cuve 1 est inférieur pour  $x$  compris entre 0 et 2 minutes.
- 4) La cuve 2 est vide quand  $d_2$  coupe l'axe des abscisses, soit à  $x = 7$  minutes. Pour la cuve 1 :  $f_1(12) = 2 \times 12 + 1 = 25$  cm (valeur hors du graphique, obtenue par le calcul).

### Exercice 3

Une résistance de  $R = 12 \, \Omega$  dissipe une puissance  $P = RI^2$ , où  $P$  est en watts et  $I$  en ampères.

1. Compléter le tableau de valeurs de  $P$  pour  $I = 1$ ,  $I = 2$  et  $I = 3$  ampères.
2. L'intensité passe de 2 A à 6 A. Par quel facteur la puissance est-elle multipliée ? Répondre d'abord par le raisonnement, puis vérifier par le calcul.
3. Déterminer l'intensité pour laquelle la puissance dissipée atteint 300 W.
4. Par mesure de sécurité, on impose de ne pas dépasser 432 W. L'intensité actuelle est de 5 A : de quel pourcentage peut-on encore l'augmenter ?

### Corrigé

- 1)  $P(1) = 12 \, \text{W}$  ;  $P(2) = 12 \times 4 = 48 \, \text{W}$  ;  $P(3) = 12 \times 9 = 108 \, \text{W}$ .
- 2) L'intensité est multipliée par 3, donc la puissance par  $3^2 = 9$ . Vérification :  $P(6) = 12 \times 36 = 432 \, \text{W}$ , et  $432 = 9 \times 48$ .
- 3)  $12 I^2 = 300$  donne  $I^2 = 25$ , donc  $I = 5 \, \text{A}$  (on ne retient pas  $I = -5$ , sans signification ici).
- 4) D'après la question 2,  $P = 432 \, \text{W}$  correspond à  $I = 6 \, \text{A}$ . On peut donc passer de 5 à 6 A, soit une hausse de  $\frac{6-5}{5} = 0,20$ , c'est-à-dire 20 %.

### Exercice 4

Une barre métallique s'allonge quand elle chauffe. Sa longueur  $L$  (en mm) est une fonction affine de la température  $T$  (en °C). On dispose de deux mesures : à  $T = 20 \, ^\circ\text{C}$ ,  $L = 2000,0 \, \text{mm}$  ; à  $T = 120 \, ^\circ\text{C}$ ,  $L = 2002,4 \, \text{mm}$ .

1. Calculer la pente  $a$  de cette fonction affine. Préciser son unité et l'interpréter.
2. Déterminer  $b$ , puis écrire l'expression de  $L$  en fonction de  $T$ .
3. Calculer la longueur de la barre à  $200 \, ^\circ\text{C}$ .
4. Le montage n'accepte pas une longueur supérieure à  $2003,0 \, \text{mm}$ . Déterminer la température à ne pas dépasser.

## Corrigé

- 1)  $a = \frac{2002,4 - 2000,0}{120 - 20} = \frac{2,4}{100} = 0,024 \text{ mm/}^\circ\text{C}$  : la barre s'allonge de 0,024 mm par degré.
- 2)  $2000,0 = 0,024 \times 20 + b$  donne  $b = 2000,0 - 0,48 = 1999,52$ . Donc  $L = 0,024T + 1999,52$ .
- 3)  $L(200) = 0,024 \times 200 + 1999,52 = 4,8 + 1999,52 = 2004,32 \text{ mm}$ .
- 4)  $0,024T + 1999,52 = 2003,0$  donne  $0,024T = 3,48$ , donc  $T = \frac{3,48}{0,024} = 145 \text{ }^\circ\text{C}$ .

## Exercice 5

On découpe des plaques carrées de côté  $x$  (en cm). On note  $S(x)$  l'aire de la plaque, en  $\text{cm}^2$ .

1. Exprimer  $S(x)$ , puis calculer  $S(2)$ ,  $S(4)$  et  $S(6)$ .
2. La fonction  $S$  est-elle linéaire ? Justifier en comparant  $S(4)$  et  $2 \times S(2)$ .
3. On augmente le côté de 50 %. Par quel coefficient l'aire est-elle multipliée ? De quel pourcentage augmente-t-elle ?
4. Déterminer le côté d'une plaque d'aire  $121 \text{ cm}^2$ .

## Corrigé

- 1)  $S(x) = x^2$ , donc  $S(2) = 4$ ,  $S(4) = 16$  et  $S(6) = 36 \text{ cm}^2$ .
- 2) Non :  $2 \times S(2) = 8$  alors que  $S(4) = 16$ . Doubler le côté ne double pas l'aire, il la quadruple : la dépendance est en carré, pas proportionnelle.
- 3) Le côté est multiplié par 1,50, donc l'aire par  $1,50^2 = 2,25$  : elle augmente de 125 %.
- 4)  $x^2 = 121$  donne  $x = 11 \text{ cm}$  (le côté étant positif).

## Exercice 6

Trois grandeurs ont été relevées pour les mêmes valeurs de  $x$ .

| $x$    | 0 | 1 | 2 | 3  | 4  |
|--------|---|---|---|----|----|
| $f(x)$ | 0 | 3 | 6 | 9  | 12 |
| $g(x)$ | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 |
| $h(x)$ | 0 | 2 | 8 | 18 | 32 |

1. Pour chacune des trois fonctions, indiquer s'il s'agit d'une fonction linéaire, affine (non linéaire) ou carré. Justifier à chaque fois par le test adapté (rapport constant, écarts constants, ou facteur  $k^2$ ).
2. Donner l'expression de  $f$ , de  $g$  et de  $h$ .
3. Calculer  $f(10)$ ,  $g(10)$  et  $h(10)$ .
4. Laquelle des trois grandeurs croît le plus vite lorsque  $x$  devient grand ? Justifier.

## Corrigé

1)  $f$  : les rapports  $\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{12}{4} = 3$  sont constants, et  $f(0) = 0$  : fonction **linéaire**.

$g$  : les rapports ne sont pas constants ( $\frac{7}{1} = 7$  mais  $\frac{13}{4} = 3,25$ ), en revanche les écarts valent 2 à chaque pas et  $g(0) = 5 \neq 0$  : fonction **affine**.

$h$  : les écarts ne sont pas constants (2, 6, 10, 14). En revanche, quand  $x$  passe de 1 à 2 (facteur 2), l'image passe de 2 à 8 (facteur  $4 = 2^2$ ) : fonction **carré**.

2)  $f(x) = 3x$  ;  $g(x) = 2x + 5$  ;  $h(x) = 2x^2$  (on vérifie :  $2 \times 4^2 = 32$ ).

3)  $f(10) = 30$  ;  $g(10) = 25$  ;  $h(10) = 200$ .

4) C'est  $h$  : la dépendance en carré finit toujours par dépasser une croissance affine ou linéaire, car multiplier  $x$  par  $k$  multiplie  $h(x)$  par  $k^2$ .

Pour aller plus loin

## Exercice 7

Une fonction affine  $f$  vérifie  $f(2) = 7$  et  $f(5) = 16$ . On considère par ailleurs la fonction  $g$  définie par  $g(x) = -2x + 6$ .

- Déterminer les coefficients  $a$  et  $b$  de  $f$ , puis écrire son expression.
- Déterminer l'antécédent de 0 par  $f$ . Que représente ce nombre pour la droite représentative de  $f$  ?
- Résoudre  $f(x) = g(x)$ , puis donner les coordonnées du point d'intersection des deux droites.
- Sans tracer, dire laquelle des deux fonctions est croissante et laquelle est décroissante.

## Corrigé

1)  $a = \frac{16 - 7}{5 - 2} = \frac{9}{3} = 3$ . Avec  $f(2) = 7$  :  $7 = 3 \times 2 + b$ , donc  $b = 1$  et  $f(x) = 3x + 1$ .

2)  $3x + 1 = 0$  donne  $x = -\frac{1}{3}$ . C'est l'abscisse du point où la droite coupe l'axe des abscisses.

3)  $3x + 1 = -2x + 6$  donne  $5x = 5$ , donc  $x = 1$ , puis  $y = 3 \times 1 + 1 = 4$ . Point d'intersection : (1 ; 4).

4)  $f$  a une pente positive (3) : elle est croissante.  $g$  a une pente négative (-2) : elle est décroissante.

## Exercice 8

On considère la parabole d'équation  $y = x^2$  et la droite d'équation  $y = 3x + 4$ .

- Vérifier que le point de coordonnées (4 ; 16) appartient aux deux courbes.
- Montrer que chercher les abscisses des points d'intersection revient à résoudre  $x^2 - 3x - 4 = 0$ .
- Développer  $(x - 4)(x + 1)$  et vérifier que l'on retrouve l'expression précédente.
- En déduire les coordonnées des deux points d'intersection.

## Corrigé

- 1) Sur la parabole :  $4^2 = 16$ . ✓ Sur la droite :  $3 \times 4 + 4 = 16$ . ✓ Le point appartient bien aux deux courbes.
- 2) Un point d'intersection a la même ordonnée sur les deux courbes :  $x^2 = 3x + 4$ , soit  $x^2 - 3x - 4 = 0$ .
- 3)  $(x - 4)(x + 1) = x^2 + x - 4x - 4 = x^2 - 3x - 4$ . ✓
- 4) Un produit est nul si l'un des facteurs est nul :  $x = 4$  ou  $x = -1$ . Pour  $x = 4$ ,  $y = 16$  ; pour  $x = -1$ ,  $y = (-1)^2 = 1$ . Les points d'intersection sont  $(4; 16)$  et  $(-1; 1)$ .

## Exercice 9

La force de résistance de l'air  $F$  (en newtons) qui s'oppose au déplacement d'un véhicule est modélisée par  $F = k v^2$ , où  $v$  est la vitesse (en m/s) et  $k$  une constante. Un essai donne  $F = 15$  N pour  $v = 10$  m/s.

1. Déterminer la valeur de  $k$ .
2. Calculer la force pour  $v = 30$  m/s. Retrouver ce résultat par le facteur  $k^2$  à partir de l'essai initial.
3. Déterminer la vitesse pour laquelle la force atteint 60 N.
4. La vitesse passe de 25 m/s à 50 m/s. La force est-elle doublée ? Justifier.

## Corrigé

- 1)  $k \times 10^2 = 15$  donne  $k = \frac{15}{100} = 0,15$ .
- 2)  $F = 0,15 \times 30^2 = 0,15 \times 900 = 135$  N. Par le facteur : la vitesse est multipliée par 3, donc la force par  $3^2 = 9$ , et  $9 \times 15 = 135$  N. ✓
- 3)  $0,15 v^2 = 60$  donne  $v^2 = 400$ , donc  $v = 20$  m/s.
- 4) Non : la vitesse est multipliée par 2, donc la force par  $2^2 = 4$ . Elle est quadruplée, pas doublée.

## Exercice 10

Un atelier produit des pièces. Le coût total de production de  $q$  pièces, en euros, est  $C(q) = 12q + 1500$ . Chaque pièce est vendue 20 €, ce qui donne une recette  $R(q) = 20q$ .

1. Préciser la nature de chacune des deux fonctions  $C$  et  $R$ . Interpréter concrètement les nombres 12, 1500 et 20.
2. Calculer  $C(200)$  et  $R(200)$ . L'atelier est-il bénéficiaire pour 200 pièces ?
3. Le bénéfice est  $B(q) = R(q) - C(q)$ . Montrer que  $B$  est une fonction affine et donner son expression.
4. Déterminer le nombre minimal de pièces à produire pour que l'atelier soit bénéficiaire (seuil de rentabilité), puis calculer le bénéfice réalisé pour 300 pièces.

## Corrigé

- 1)  $C$  est affine (pente 12, ordonnée à l'origine 1 500) et  $R$  est linéaire (pente 20). Le nombre 12 est le coût de matière et de main-d'œuvre par pièce, 1 500 € le coût fixe (indépendant de la production), et 20 € le prix de vente unitaire.
- 2)  $C(200) = 2\,400 + 1\,500 = 3\,900$  € et  $R(200) = 4\,000$  €. La recette dépasse le coût de 100 € : l'atelier est bénéficiaire, mais de peu.
- 3)  $B(q) = 20q - (12q + 1\,500) = 8q - 1\,500$  : c'est bien une fonction affine, de pente 8 et d'ordonnée à l'origine  $-1\,500$ .
- 4)  $B(q) > 0$  équivaut à  $8q > 1\,500$ , soit  $q > 187,5$  : il faut produire au moins 188 pièces. Pour 300 pièces :  $B(300) = 2\,400 - 1\,500 = 900$  €.