



Lycée Jean-Baptiste de Baudre
Agen

Parcours de consolidation en mathématiques

Semaine 3 • extrait du parcours complet

Cahier d'approfondissement

Spécialité CPRP — Conception des Processus de Réalisation de Produits

Version professeur
(énoncés et corrigés)

De la rentrée aux vacances de la Toussaint

Semaine 3 : Trigonométrie

Ce chapitre prolonge le cahier principal. Il se compose de deux parties : (a) des exercices classiques supplémentaires (tronc commun aux quatre BTS), (b) des activités d'application en contexte métier plus complètes, qui enchaînent davantage d'étapes.

Exercices classiques (suite)

Ces exercices prolongent les deux exercices du cahier de base. Ils enchaînent plusieurs notions et demandent une étape de raisonnement supplémentaire. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. Les quatre derniers, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Une rampe d'accès rectiligne mesure 6 m de long et permet de franchir une dénivellation de 0,50 m.

1. Calculer l'angle que fait la rampe avec l'horizontale (arrondir au dixième de degré).
2. Calculer la longueur horizontale couverte par la rampe (arrondir au centimètre).
3. La pente, en pourcentage, est le rapport de la hauteur sur la longueur horizontale. La calculer. La réglementation impose une pente inférieure à 5 % : la rampe est-elle conforme ?
4. Pour la même dénivellation de 0,50 m, quelle longueur horizontale faudrait-il pour obtenir une pente de 5 % ?

Corrigé

- 1) La hauteur est le côté opposé et la rampe l'hypoténuse : $\sin \alpha = \frac{0,50}{6} \approx 0,0833$, donc $\alpha = \sin^{-1}(0,0833) \approx 4,8^\circ$.
- 2) $\sqrt{6^2 - 0,5^2} = \sqrt{36 - 0,25} = \sqrt{35,75} \approx 5,98$ m.
- 3) Pente = $\frac{0,50}{5,98} \approx 0,0836$, soit environ 8,4 %. C'est supérieur à 5 % : la rampe n'est **pas** conforme.
- 4) Il faut $\frac{0,50}{L} = 0,05$, donc $L = \frac{0,50}{0,05} = 10$ m : il faut presque doubler la longueur.

Exercice 2

Un bâtiment de 9 m de large est couvert par une toiture à deux pans symétriques. Chaque pan fait un angle de 35° avec l'horizontale.

1. Justifier que la demi-largeur du bâtiment vaut 4,50 m, puis calculer la hauteur du faîtage au-dessus du niveau des murs (arrondir au centimètre).
2. Calculer la longueur d'un pan de toiture, mesurée du mur au faîtage (arrondir au centimètre).
3. Vérifier ce dernier résultat par le théorème de Pythagore.

4. Le bâtiment mesure 12 m de long. Calculer l'aire totale de la toiture, en m^2 .

Corrigé

- 1) Les deux pans étant symétriques, chacun couvre la moitié de la largeur, soit $\frac{9}{2} = 4,50$ m. La hauteur est le côté opposé à l'angle de 35° et la demi-largeur le côté adjacent : hauteur = $4,50 \times \tan 35^\circ \approx 4,50 \times 0,7002 \approx 3,15$ m.
 2) Le pan est l'hypoténuse : longueur = $\frac{4,50}{\cos 35^\circ} \approx \frac{4,50}{0,8192} \approx 5,49$ m.
 3) $\sqrt{4,50^2 + 3,15^2} = \sqrt{20,25 + 9,92} = \sqrt{30,17} \approx 5,49$ m. ✓
 4) Un pan : $5,49 \times 12 \approx 65,9$ m^2 . Les deux pans : environ 131,8 m^2 .

Exercice 3

Une force de 250 N est appliquée sur une pièce, selon une direction faisant un angle de 30° avec l'horizontale.

- Calculer la composante horizontale de cette force (arrondir au dixième de newton).
- Calculer sa composante verticale.
- Vérifier que ces deux composantes redonnent bien une force de 250 N.
- Une autre force a une composante horizontale de 200 N et une composante verticale de 150 N. Calculer son intensité et l'angle qu'elle fait avec l'horizontale.

Corrigé

- 1) La composante horizontale est le côté adjacent : $250 \times \cos 30^\circ \approx 250 \times 0,8660 \approx 216,5$ N.
 2) La composante verticale est le côté opposé : $250 \times \sin 30^\circ = 250 \times 0,5 = 125,0$ N.
 3) $\sqrt{216,5^2 + 125^2} = \sqrt{46\,872 + 15\,625} = \sqrt{62\,497} \approx 250,0$ N. ✓
 4) Intensité : $\sqrt{200^2 + 150^2} = \sqrt{40\,000 + 22\,500} = \sqrt{62\,500} = 250$ N. Angle : $\tan \alpha = \frac{150}{200} = 0,75$, donc $\alpha = \tan^{-1}(0,75) \approx 36,9^\circ$.

Exercice 4

Un triangle rectangle a pour côtés de l'angle droit 40 mm et 75 mm. On note α l'angle dont le côté opposé mesure 40 mm.

- Calculer la longueur de l'hypoténuse.
- Calculer l'angle α (arrondir au dixième de degré).
- En déduire le second angle aigu β , sans nouvelle trigonométrie inverse.
- Calculer $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ à 10^{-4} près, puis vérifier numériquement que $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$.

Corrigé

- 1) $\sqrt{40^2 + 75^2} = \sqrt{1\,600 + 5\,625} = \sqrt{7\,225} = 85$ mm.
 2) $\tan \alpha = \frac{40}{75} \approx 0,5333$, donc $\alpha = \tan^{-1}(0,5333) \approx 28,1^\circ$.
 3) Les deux angles aigus sont complémentaires : $\beta = 90^\circ - 28,1^\circ = 61,9^\circ$.
 4) $\sin \alpha = \frac{40}{85} \approx 0,4706$ et $\cos \alpha = \frac{75}{85} \approx 0,8824$. Alors $0,4706^2 + 0,8824^2 \approx 0,2215 + 0,7786 \approx 1,0001$, soit 1 aux arrondis près. ✓

Exercice 5

Un triangle a pour côtés 1, $\sqrt{3}$ et 2 (en centimètres).

1. Identifier l'hypoténuse, puis vérifier par le calcul que ce triangle est bien rectangle.
2. Déterminer les deux angles aigus en utilisant le tableau des valeurs particulières.
3. Vérifier la cohérence du résultat de deux façons : par la somme des angles, et en calculant $\tan$ du plus grand angle aigu.
4. On fabrique une pièce de même forme, mais dont l'hypoténuse mesure 10 cm. Calculer ses deux autres côtés, puis dire ce que deviennent les angles.

Corrigé

- 1) L'hypoténuse est le côté le plus long : 2. Vérification : $2^2 = 4$ et $1^2 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4$. Il y a égalité, donc le triangle est rectangle.
- 2) Pour l'angle α opposé au côté 1 : $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, donc $\alpha = 30^\circ$. L'autre angle aigu vaut $\beta = 60^\circ$.
- 3) $30^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. ✓ Et $\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$, conforme au tableau. ✓
- 4) L'hypoténuse est multipliée par 5, donc tous les côtés aussi : $1 \times 5 = 5$ cm et $\sqrt{3} \times 5 \approx 8,66$ cm. Les angles, eux, sont inchangés : 30° et 60° . Un agrandissement modifie les longueurs, jamais les angles.

Exercice 6

Cet exercice porte sur l'usage de la calculatrice et le contrôle des résultats.

1. En mode degré, calculer $\sin 30^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\tan 45^\circ$ et $\sin 90^\circ$.
2. Que renvoie la calculatrice pour $\sin 90$ si elle est restée en mode radian ? Comment ce seul résultat permet-il de détecter l'erreur de mode ?
3. Calculer $\tan^{-1}(1)$ dans chacun des deux modes, et commenter les deux résultats obtenus.
4. Un étudiant annonce avoir trouvé $\sin \alpha = 1,2$ pour un angle aigu d'un triangle rectangle. Expliquer, sans calculatrice, pourquoi ce résultat est nécessairement faux.

Corrigé

- 1) $\sin 30^\circ = 0,5$; $\cos 60^\circ = 0,5$; $\tan 45^\circ = 1$; $\sin 90^\circ = 1$.
- 2) En mode radian, la calculatrice interprète 90 comme 90 radians et renvoie environ 0,894. Comme $\sin 90^\circ$ doit valoir exactement 1, tout autre résultat signale que le mode est incorrect.
- 3) En mode degré : $\tan^{-1}(1) = 45^\circ$. En mode radian : $\tan^{-1}(1) \approx 0,7854$. C'est le même angle exprimé dans deux unités différentes, et non deux angles différents.
- 4) Le sinus est le rapport du côté opposé à l'hypoténuse. Or l'hypoténuse est toujours le plus long côté, donc ce rapport est toujours strictement inférieur à 1. Une valeur de 1,2 est impossible : il y a eu confusion de côtés, ou emploi de la tangente à la place du sinus.

Pour aller plus loin

Exercice 7

On considère un triangle rectangle d'hypoténuse c , dont le côté opposé à l'angle aigu α mesure a et le côté adjacent b .

1. Exprimer $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ en fonction de a , b et c .
2. Calculer $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2$ et le mettre sous forme d'une seule fraction.

3. Conclure, en utilisant le théorème de Pythagore, que cette somme vaut toujours 1.
4. Application : on sait que $\sin \alpha = 0,28$. Calculer $\cos \alpha$ sans passer par l'angle, puis en déduire $\tan \alpha$ à 10^{-2} près.

Corrigé

- 1) $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ et $\cos \alpha = \frac{b}{c}$.
- 2) $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$.
- 3) D'après le théorème de Pythagore, $a^2 + b^2 = c^2$, donc cette fraction vaut $\frac{c^2}{c^2} = 1$.
- 4) $(\cos \alpha)^2 = 1 - 0,28^2 = 1 - 0,0784 = 0,9216$, donc $\cos \alpha = \sqrt{0,9216} = 0,96$ (le cosinus d'un angle aigu est positif). Puis $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,28}{0,96} \approx 0,29$.

Exercice 8

Une échelle de 5 m est appuyée contre un mur vertical et fait un angle de 70° avec le sol.

1. Calculer la hauteur atteinte sur le mur (arrondir au centimètre).
2. Calculer la distance entre le pied de l'échelle et le mur.
3. Une règle de sécurité courante veut que le pied soit écarté du mur d'un quart de la longueur de l'échelle. Calculer cette distance, puis l'angle correspondant (arrondir au dixième de degré).
4. Avec ce nouveau réglage, quelle hauteur atteint-on sur le mur ? L'échelle est-elle plus ou moins redressée qu'au départ ?

Corrigé

- 1) La hauteur est le côté opposé à l'angle de 70° et l'échelle l'hypoténuse : $5 \times \sin 70^\circ \approx 5 \times 0,9397 \approx 4,70$ m.
- 2) La distance au mur est le côté adjacent : $5 \times \cos 70^\circ \approx 5 \times 0,3420 \approx 1,71$ m.
- 3) Un quart de 5 m fait 1,25 m. Alors $\cos \alpha = \frac{1,25}{5} = 0,25$, donc $\alpha = \cos^{-1}(0,25) \approx 75,5^\circ$.
- 4) Hauteur = $5 \times \sin 75,5^\circ \approx 5 \times 0,9682 \approx 4,84$ m. L'angle est passé de 70° à $75,5^\circ$: l'échelle est plus redressée, et atteint donc plus haut.

Exercice 9

Pour mesurer la hauteur d'un pylône, un technicien se place à 40 m de son pied et vise le sommet. L'appareil de visée, placé à 1,60 m du sol, indique un angle de 32° au-dessus de l'horizontale.

1. Calculer la hauteur du sommet au-dessus du niveau de l'appareil de visée (arrondir au décimètre).
2. En déduire la hauteur totale du pylône.
3. De quelle distance le technicien devrait-il se placer pour viser le sommet sous un angle de 45° ?
4. Reprendre la question 1 avec un angle de 33° au lieu de 32° . Que peut-on en conclure sur la précision exigée pour la visée ?

Corrigé

- 1) La hauteur cherchée est le côté opposé et la distance au sol le côté adjacent : $40 \times \tan 32^\circ \approx 40 \times 0,6249 \approx 25,0$ m.
- 2) Hauteur totale $\approx 25,0 + 1,60 = 26,6$ m.
- 3) Sous un angle de 45° , on a $\tan 45^\circ = 1$, donc la distance horizontale est égale à la hauteur visée, soit environ 25,0 m.
- 4) $40 \times \tan 33^\circ \approx 40 \times 0,6494 \approx 26,0$ m, soit environ 1 m de plus. Une erreur de 1° sur la visée entraîne donc une erreur de l'ordre du mètre sur la hauteur : la mesure de l'angle doit être soignée.

Exercice 10

La section d'une glissière a la forme d'un trapèze rectangle : la grande base mesure 80 mm, la petite base 50 mm et la hauteur 35 mm. L'un des côtés est perpendiculaire aux deux bases, l'autre est oblique.

1. Calculer le décalage horizontal entre les extrémités des deux bases, du côté oblique.
2. En déduire la longueur du côté oblique (arrondir au dixième de millimètre).
3. Calculer l'angle que fait le côté oblique avec la grande base (arrondir au dixième de degré).
4. Calculer l'aire de la section, en mm^2 puis en cm^2 (rappel : aire d'un trapèze = $\frac{\text{grande base} + \text{petite base}}{2} \times \text{hauteur}$).

Corrigé

- 1) Le côté perpendiculaire n'introduit aucun décalage, donc tout l'écart se reporte du côté oblique : $80 - 50 = 30$ mm.
- 2) Le côté oblique est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés 30 mm et 35 mm : $\sqrt{900 + 1225} = \sqrt{2125} \approx 46,1$ mm.
- 3) $\tan \alpha = \frac{35}{30} \approx 1,1667$, donc $\alpha = \tan^{-1}(1,1667) \approx 49,4^\circ$.
- 4) Aire = $\frac{80 + 50}{2} \times 35 = 65 \times 35 = 2275 \text{ mm}^2$. Comme $1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$, cela fait $22,75 \text{ cm}^2$.

Activités d'application

Activité 1 • Demi-angle au sommet d'un cône d'usinage

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : tangente, angle, isoler **Lien référentiel** : S2.4 — géométrie d'usinage, lecture de plan

Un cône à tourner relie un grand diamètre $D_1 = 80$ mm à un petit diamètre $D_2 = 60$ mm, sur une longueur $L = 10$ mm. Le demi-angle au sommet α est l'angle du triangle rectangle dont le côté opposé est la **demi-différence de rayon** et le côté adjacent est L .

1. Calculer la demi-différence de rayon $\Delta r = (D_1 - D_2)/2$.
2. Rappeler la définition de $\tan \alpha$ dans un triangle rectangle.
3. Calculer $\tan \alpha$, puis en déduire l'angle α .

Corrigé

1. $\Delta r = \frac{80 - 60}{2} = 10 \text{ mm.}$
2. $\tan \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$
3. $\tan \alpha = \frac{\Delta r}{L} = \frac{10}{10} = 1$, donc $\alpha = 45^\circ$.

Activité 2 • Réfraction de la lumière

PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : sinus, isoler une grandeur **Lien référentiel :** S15 — Optique (principe des fibres optiques)

Lorsqu'un rayon lumineux passe de l'air dans le verre, il est dévié selon la loi de la réfraction (Snell-Descartes), que l'on donne : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$. Ici l'air a un indice $n_1 = 1$, le verre $n_2 = 1,5$, et le rayon arrive avec un angle d'incidence $i_1 = 30^\circ$.

1. À partir de la loi de la réfraction, exprimer $\sin i_2$. (isoler $\sin i_2$)
2. Calculer $\sin i_2$, puis en déduire l'angle de réfraction i_2 .

Corrigé

1. $\sin i_2 = \frac{n_1 \sin i_1}{n_2}.$
2. $\sin i_2 = \frac{1 \times \sin 30^\circ}{1,5} = \frac{0,5}{1,5} \approx 0,333$, donc $i_2 \approx 19,5^\circ$. Le rayon se rapproche de la normale en entrant dans le verre.