



Lycée Jean-Baptiste de Baudre
Agen

Parcours de consolidation en mathématiques

Semaine 6 • extrait du parcours complet

Cahier d'approfondissement

Spécialité CPRP — Conception des Processus de Réalisation de Produits

Version étudiant
(énoncés et espaces de réponse)

De la rentrée aux vacances de la Toussaint

Semaine 6 : Dérivation

Ce chapitre prolonge le cahier principal. Il se compose de deux parties : (a) des exercices classiques supplémentaires (tronc commun aux quatre BTS), (b) des activités d'application en contexte métier plus complètes, qui enchaînent davantage d'étapes.

Exercices classiques (suite)

Ces exercices prolongent les deux exercices du cahier de base. Ils enchaînent plusieurs notions et demandent une étape de raisonnement supplémentaire. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. Les quatre derniers, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 6x + 5$. On rappelle que la tangente à la courbe au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

1. Calculer $f'(x)$, puis $f(4)$ et $f'(4)$.
2. En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse 4, sous la forme $y = ax + b$.
3. Déterminer l'abscisse du point où la tangente est horizontale, puis l'ordonnée de ce point et l'équation de cette tangente.
4. Déterminer l'abscisse du point où la tangente a pour pente 4.

Réponse :

Exercice 2

Un atelier produit q lots de pièces. Le coût total, en euros, est $C(q) = 0,5q^2 + 10q + 200$, et chaque lot est vendu 40 €, ce qui donne une recette $R(q) = 40q$.

1. Calculer $C(20)$ et $R(20)$. L'atelier est-il bénéficiaire pour 20 lots ?
2. Le bénéfice est $B(q) = R(q) - C(q)$. Montrer que $B(q) = -0,5q^2 + 30q - 200$.
3. Calculer $B'(q)$, puis résoudre $B'(q) = 0$.
4. Étudier le signe de B' pour justifier qu'il s'agit d'un maximum, puis donner la production optimale et le bénéfice correspondant.

Réponse :

Exercice 3

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Vérifier, en développant, que $f'(x) = 3(x - 3)(x + 1)$.
3. Résoudre $f'(x) = 0$, puis déterminer le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x .
4. En déduire les variations de f , puis calculer les deux extremums et préciser leur nature.

Réponse :

Exercice 4

On cherche une fonction de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ qui vérifie les trois conditions suivantes : $f(0) = 5$, $f'(0) = -4$ et $f'(2) = 0$.

1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b .
2. Traduire chacune des trois conditions par une égalité portant sur a , b ou c .
3. En déduire les valeurs de a , b et c , puis l'expression de f .
4. La condition $f'(2) = 0$ signifie que la tangente est horizontale en $x = 2$. Déterminer s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum, et calculer la valeur correspondante.

Réponse :

Exercice 5

Un atelier veut clôturer une aire de stockage rectangulaire le long d'un mur existant. Le mur constitue l'un des quatre côtés, les trois autres sont grillagés. On dispose de 60 m de grillage. On note x la largeur (le côté perpendiculaire au mur), en mètres.

1. Exprimer la longueur du côté parallèle au mur en fonction de x . Entre quelles valeurs x peut-il varier ?
2. En déduire l'aire $A(x)$ de la zone clôturée, développée sous forme de polynôme.
3. Calculer $A'(x)$ et résoudre $A'(x) = 0$.
4. Justifier qu'il s'agit d'un maximum, puis donner les dimensions de l'aire de stockage la plus grande possible et cette aire.

Réponse :

Exercice 6

Soit $f(x) = x^2$. On s'intéresse aux taux de variation moyens de f entre 1 et une valeur b de plus en plus proche de 1.

1. Calculer le taux de variation moyen de f entre 1 et 3, puis entre 1 et 1,5.
2. Calculer de même ce taux entre 1 et 1,1, puis entre 1 et 1,01.
3. Vers quelle valeur ces taux semblent-ils se rapprocher ? Calculer $f'(1)$ et comparer.
4. Interpréter géométriquement : que deviennent les droites dont on vient de calculer les pentes, lorsque b se rapproche de 1 ?

Réponse :

Pour aller plus loin

Exercice 7

Soit $f(x) = x^3 - 3x$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer les abscisses des points où la tangente à la courbe est horizontale, puis les ordonnées de ces points.
3. Déterminer les abscisses des points où la tangente a pour coefficient directeur 9.
4. Écrire l'équation de chacune de ces deux tangentes de pente 9.

Réponse :

Exercice 8

Dans une plaque carrée de 24 cm de côté, on découpe un carré de côté x à chacun des quatre coins, puis on relève les bords pour former une boîte sans couvercle.

1. Exprimer les dimensions de la boîte en fonction de x , puis son volume $V(x)$. Préciser entre quelles valeurs x peut varier.
2. Développer $V(x)$ sous forme de polynôme.
3. Calculer $V'(x)$, puis vérifier que $V'(x) = 12(x - 4)(x - 12)$. En déduire la seule valeur de x acceptable.
4. Calculer le volume maximal de la boîte.

Réponse :

Exercice 9

Pendant la charge d'un composant, la charge accumulée, en coulombs, est donnée par $q(t) = -0,05t^3 + 1,5t^2$, où t est le temps en secondes, pour t compris entre 0 et 20 s.

1. Calculer l'intensité $i(t) = q'(t)$, puis $i(10)$.
2. Déterminer les instants auxquels l'intensité est nulle.
3. L'intensité est elle-même une fonction du temps. Calculer $i'(t)$ et résoudre $i'(t) = 0$.
4. En déduire l'instant auquel l'intensité est maximale et la valeur de ce maximum.

Réponse :

Exercice 10

Un mobile se déplace le long d'un axe. Sa position, en mètres, est $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, avec t en secondes.

1. Calculer $v(t) = x'(t)$, puis vérifier que $v(t) = 3(t-1)(t-3)$.
2. Déterminer les instants auxquels le mobile est à l'arrêt.
3. Étudier le signe de $v(t)$ pour $t \geq 0$, et en déduire dans quel sens le mobile se déplace sur chaque intervalle.
4. Calculer $x(0)$, $x(1)$ et $x(3)$, puis décrire en une phrase le trajet du mobile entre $t = 0$ et $t = 3$ s.

Réponse :