



Lycée Jean-Baptiste de Baudre
Agen

Parcours de consolidation en mathématiques

Semaine 6 • extrait du parcours complet

Cahier d'approfondissement

Spécialité CPRP — Conception des Processus de Réalisation de Produits

Version professeur
(énoncés et corrigés)

De la rentrée aux vacances de la Toussaint

Semaine 6 : Dérivation

Ce chapitre prolonge le cahier principal. Il se compose de deux parties : (a) des exercices classiques supplémentaires (tronc commun aux quatre BTS), (b) des activités d'application en contexte métier plus complètes, qui enchaînent davantage d'étapes.

Exercices classiques (suite)

Ces exercices prolongent les deux exercices du cahier de base. Ils enchaînent plusieurs notions et demandent une étape de raisonnement supplémentaire. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. Les quatre derniers, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 6x + 5$. On rappelle que la tangente à la courbe au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

1. Calculer $f'(x)$, puis $f(4)$ et $f'(4)$.
2. En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse 4, sous la forme $y = ax + b$.
3. Déterminer l'abscisse du point où la tangente est horizontale, puis l'ordonnée de ce point et l'équation de cette tangente.
4. Déterminer l'abscisse du point où la tangente a pour pente 4.

Corrigé

- 1) $f'(x) = 2x - 6$; $f(4) = 16 - 24 + 5 = -3$; $f'(4) = 8 - 6 = 2$.
- 2) $y = 2(x - 4) + (-3) = 2x - 8 - 3$, soit $y = 2x - 11$.
- 3) $2x - 6 = 0$ donne $x = 3$, et $f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$. La tangente horizontale passe par $(3; -4)$: son équation est $y = -4$.
- 4) $2x - 6 = 4$ donne $2x = 10$, donc $x = 5$.

Exercice 2

Un atelier produit q lots de pièces. Le coût total, en euros, est $C(q) = 0,5q^2 + 10q + 200$, et chaque lot est vendu 40 €, ce qui donne une recette $R(q) = 40q$.

1. Calculer $C(20)$ et $R(20)$. L'atelier est-il bénéficiaire pour 20 lots ?
2. Le bénéfice est $B(q) = R(q) - C(q)$. Montrer que $B(q) = -0,5q^2 + 30q - 200$.
3. Calculer $B'(q)$, puis résoudre $B'(q) = 0$.
4. Étudier le signe de B' pour justifier qu'il s'agit d'un maximum, puis donner la production optimale et le bénéfice correspondant.

Corrigé

- 1) $C(20) = 0,5 \times 400 + 200 + 200 = 600$ € et $R(20) = 800$ €. L'atelier est bénéficiaire de 200 €.
- 2) $B(q) = 40q - (0,5q^2 + 10q + 200) = -0,5q^2 + 30q - 200$. ✓ (Vérification : $B(20) = -200 + 600 - 200 = 200$ €, cohérent avec la question 1.)
- 3) $B'(q) = -q + 30$, qui s'annule pour $q = 30$.
- 4) Pour $q < 30$, $B'(q) > 0$; pour $q > 30$, $B'(q) < 0$. Le signe passe de + à - : c'est bien un maximum. La production optimale est de 30 lots, pour un bénéfice de $B(30) = -450 + 900 - 200 = 250$ €.

Exercice 3

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Vérifier, en développant, que $f'(x) = 3(x-3)(x+1)$.
3. Résoudre $f'(x) = 0$, puis déterminer le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x .
4. En déduire les variations de f , puis calculer les deux extremums et préciser leur nature.

Corrigé

- 1) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.
- 2) $3(x-3)(x+1) = 3(x^2 + x - 3x - 3) = 3(x^2 - 2x - 3) = 3x^2 - 6x - 9$. ✓
- 3) Un produit est nul si l'un des facteurs l'est : $x = 3$ ou $x = -1$. Le facteur 3 étant positif, le signe est celui de $(x-3)(x+1)$: positif pour $x < -1$, négatif pour $-1 < x < 3$, positif pour $x > 3$.
- 4) f est croissante sur $] -\infty ; -1]$, décroissante sur $[-1 ; 3]$, puis croissante sur $[3 ; +\infty[$. En $x = -1$, le signe passe de + à - : **maximum** local, $f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$. En $x = 3$, le signe passe de - à + : **minimum** local, $f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22$.

Exercice 4

On cherche une fonction de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ qui vérifie les trois conditions suivantes : $f(0) = 5$, $f'(0) = -4$ et $f'(2) = 0$.

1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b .
2. Traduire chacune des trois conditions par une égalité portant sur a , b ou c .
3. En déduire les valeurs de a , b et c , puis l'expression de f .
4. La condition $f'(2) = 0$ signifie que la tangente est horizontale en $x = 2$. Déterminer s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum, et calculer la valeur correspondante.

Corrigé

- 1) $f'(x) = 2ax + b$.
- 2) $f(0) = c$, donc $c = 5$. $f'(0) = b$, donc $b = -4$. $f'(2) = 4a + b$, donc $4a - 4 = 0$.
- 3) De la dernière égalité : $a = 1$. Donc $f(x) = x^2 - 4x + 5$.
- 4) $f'(x) = 2x - 4$: négative avant $x = 2$, positive après. Le signe passe de - à +, c'est un **minimum**, et $f(2) = 4 - 8 + 5 = 1$.

Exercice 5

Un atelier veut clôturer une aire de stockage rectangulaire le long d'un mur existant. Le mur constitue l'un des quatre côtés, les trois autres sont grillagés. On dispose de 60 m de grillage.

On note x la largeur (le côté perpendiculaire au mur), en mètres.

1. Exprimer la longueur du côté parallèle au mur en fonction de x . Entre quelles valeurs x peut-il varier ?
2. En déduire l'aire $A(x)$ de la zone clôturée, développée sous forme de polynôme.
3. Calculer $A'(x)$ et résoudre $A'(x) = 0$.
4. Justifier qu'il s'agit d'un maximum, puis donner les dimensions de l'aire de stockage la plus grande possible et cette aire.

Corrigé

- 1) Deux côtés mesurent x , il reste $60 - 2x$ pour le côté parallèle au mur. Il faut $x > 0$ et $60 - 2x > 0$, donc x varie entre 0 et 30 mètres.
- 2) $A(x) = x(60 - 2x) = 60x - 2x^2$.
- 3) $A'(x) = 60 - 4x$, qui s'annule pour $x = 15$.
- 4) Pour $x < 15$, $A'(x) > 0$; pour $x > 15$, $A'(x) < 0$: le signe passe de $+$ à $-$, c'est un maximum. La zone mesure alors 15 m de large et $60 - 30 = 30$ m de long, pour une aire de 450 m^2 .

Exercice 6

Soit $f(x) = x^2$. On s'intéresse aux taux de variation moyens de f entre 1 et une valeur b de plus en plus proche de 1.

1. Calculer le taux de variation moyen de f entre 1 et 3, puis entre 1 et 1,5.
2. Calculer de même ce taux entre 1 et 1,1, puis entre 1 et 1,01.
3. Vers quelle valeur ces taux semblent-ils se rapprocher ? Calculer $f'(1)$ et comparer.
4. Interpréter géométriquement : que deviennent les droites dont on vient de calculer les pentes, lorsque b se rapproche de 1 ?

Corrigé

- 1) Entre 1 et 3 : $\frac{9 - 1}{3 - 1} = 4$. Entre 1 et 1,5 : $\frac{2,25 - 1}{0,5} = 2,5$.
- 2) Entre 1 et 1,1 : $\frac{1,21 - 1}{0,1} = 2,1$. Entre 1 et 1,01 : $\frac{1,0201 - 1}{0,01} = 2,01$.
- 3) Les taux se rapprochent de 2. Or $f'(x) = 2x$, donc $f'(1) = 2$: c'est bien la valeur vers laquelle on tendait.
- 4) Chaque taux est la pente de la droite joignant le point d'abscisse 1 au point d'abscisse b . Quand b se rapproche de 1, ces droites se rapprochent de la **tangente** en $x = 1$, dont la pente est précisément $f'(1)$.

_____ Pour aller plus loin _____

Exercice 7

Soit $f(x) = x^3 - 3x$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer les abscisses des points où la tangente à la courbe est horizontale, puis les ordonnées de ces points.
3. Déterminer les abscisses des points où la tangente a pour coefficient directeur 9.
4. Écrire l'équation de chacune de ces deux tangentes de pente 9.

Corrigé

- 1) $f'(x) = 3x^2 - 3$.
- 2) $3x^2 - 3 = 0$ donne $x^2 = 1$, donc $x = 1$ ou $x = -1$. Les points sont $(1; -2)$ car $f(1) = 1 - 3 = -2$, et $(-1; 2)$ car $f(-1) = -1 + 3 = 2$.
- 3) $3x^2 - 3 = 9$ donne $3x^2 = 12$, soit $x^2 = 4$: $x = 2$ ou $x = -2$.
- 4) En $x = 2$: $f(2) = 8 - 6 = 2$, d'où $y = 9(x - 2) + 2 = 9x - 16$. En $x = -2$: $f(-2) = -8 + 6 = -2$, d'où $y = 9(x + 2) - 2 = 9x + 16$. Les deux tangentes sont parallèles, ce qui est cohérent avec une pente commune.

Exercice 8

Dans une plaque carrée de 24 cm de côté, on découpe un carré de côté x à chacun des quatre coins, puis on relève les bords pour former une boîte sans couvercle.

1. Exprimer les dimensions de la boîte en fonction de x , puis son volume $V(x)$. Préciser entre quelles valeurs x peut varier.
2. Développer $V(x)$ sous forme de polynôme.
3. Calculer $V'(x)$, puis vérifier que $V'(x) = 12(x - 4)(x - 12)$. En déduire la seule valeur de x acceptable.
4. Calculer le volume maximal de la boîte.

Corrigé

- 1) La base est un carré de côté $24 - 2x$ et la hauteur vaut x , donc $V(x) = x(24 - 2x)^2$. Il faut $x > 0$ et $24 - 2x > 0$, donc x varie entre 0 et 12 cm.
- 2) $(24 - 2x)^2 = 576 - 96x + 4x^2$, donc $V(x) = 4x^3 - 96x^2 + 576x$.
- 3) $V'(x) = 12x^2 - 192x + 576 = 12(x^2 - 16x + 48)$. Or $12(x - 4)(x - 12) = 12(x^2 - 16x + 48)$. ✓ Donc $V'(x) = 0$ pour $x = 4$ ou $x = 12$; seule $x = 4$ cm est acceptable, car $x = 12$ annulerait la base.
- 4) $V(4) = 4 \times (24 - 8)^2 = 4 \times 256 = 1024 \text{ cm}^3$.

Exercice 9

Pendant la charge d'un composant, la charge accumulée, en coulombs, est donnée par $q(t) = -0,05t^3 + 1,5t^2$, où t est le temps en secondes, pour t compris entre 0 et 20 s.

1. Calculer l'intensité $i(t) = q'(t)$, puis $i(10)$.
2. Déterminer les instants auxquels l'intensité est nulle.
3. L'intensité est elle-même une fonction du temps. Calculer $i'(t)$ et résoudre $i'(t) = 0$.
4. En déduire l'instant auquel l'intensité est maximale et la valeur de ce maximum.

Corrigé

- 1) $i(t) = -0,15t^2 + 3t$, donc $i(10) = -15 + 30 = 15 \text{ A}$.
- 2) $-0,15t^2 + 3t = 0$ s'écrit $t(-0,15t + 3) = 0$, donc $t = 0$ ou $t = \frac{3}{0,15} = 20 \text{ s}$: l'intensité est nulle au début et à la fin de la charge.
- 3) $i'(t) = -0,3t + 3$, qui s'annule pour $t = 10 \text{ s}$.
- 4) i' est positive avant $t = 10$ et négative après : l'intensité passe par un maximum à $t = 10 \text{ s}$, et ce maximum vaut $i(10) = 15 \text{ A}$ (calculé à la question 1).

Exercice 10

Un mobile se déplace le long d'un axe. Sa position, en mètres, est $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, avec t en secondes.

1. Calculer $v(t) = x'(t)$, puis vérifier que $v(t) = 3(t-1)(t-3)$.
2. Déterminer les instants auxquels le mobile est à l'arrêt.
3. Étudier le signe de $v(t)$ pour $t \geq 0$, et en déduire dans quel sens le mobile se déplace sur chaque intervalle.
4. Calculer $x(0)$, $x(1)$ et $x(3)$, puis décrire en une phrase le trajet du mobile entre $t = 0$ et $t = 3$ s.

Corrigé

- 1) $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$. Or $3(t-1)(t-3) = 3(t^2 - 4t + 3) = 3t^2 - 12t + 9$. ✓
- 2) $v(t) = 0$ pour $t = 1$ s et $t = 3$ s.
- 3) Le signe est celui de $(t-1)(t-3)$: positif sur $[0; 1[$, négatif sur $]1; 3[$, positif sur $]3; +\infty[$. Le mobile avance, puis recule, puis avance de nouveau.
- 4) $x(0) = 0$ m, $x(1) = 1 - 6 + 9 = 4$ m, $x(3) = 27 - 54 + 27 = 0$ m. Le mobile part de l'origine, avance jusqu'à 4 m en une seconde, puis fait demi-tour et revient exactement à son point de départ à $t = 3$ s.