Chapitre 1

Semaine 1 : Calcul, formules et unités

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) des exercices classiques d'application directe (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte CIEL, qui réinvestissent ces notions dans des situations métier.

Rappel mathématique

Cette première semaine consolide les gestes de calcul élémentaires : manipuler les fractions, manier les puissances et la notation scientifique, convertir des unités sans se tromper, isoler une grandeur dans une formule. Ces gestes seront réinvestis dans toutes les semaines suivantes.

§1. Calcul sur les fractions

Définition – fraction

Une fraction $\dfrac{a}{b}$ représente le partage de a par b (avec $b \neq 0$). Le nombre a est le *numérateur*, b est le *dénominateur*.

Propriété – simplifier

Si l'on multiplie (ou divise) numérateur et dénominateur par un même nombre non nul, la fraction ne change pas de valeur :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}, \quad k \neq 0.$$

Exemple – $\dfrac{12}{18} = \dfrac{12 \div 6}{18 \div 6} = \dfrac{2}{3}$.

Propriété – additionner ou soustraire

Pour ajouter (ou retrancher) deux fractions, on les met au **même dénominateur**, puis on additionne (ou retranche) les numérateurs :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,d}{b\,d} + \frac{c\,b}{d\,b} = \frac{a\,d + c\,b}{b\,d}.$$

Exemple – $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{2 \times 4}{12} + \dfrac{1 \times 3}{12} = \dfrac{8+3}{12} = \dfrac{11}{12}$.

Propriété – multiplier ou diviser

Pour multiplier deux fractions, on multiplie numérateurs entre eux et dénominateurs entre eux :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

Pour diviser par une fraction, on multiplie par son inverse :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

Exemple – $\frac{3}{5} \times \frac{10}{9} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$. $\frac{5}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{8}$.

Point de vigilance. On additionne avec un dénominateur commun, mais on multiplie *sans* le faire. Confondre les deux est l'erreur la plus fréquente.

§2. Puissances et notation scientifique

Définition – puissance d'un nombre

Pour un entier $n \geq 1$, $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$. On pose $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Propriété – règles de calcul

Pour tous nombres a, b non nuls et entiers m, n :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{m\,n}, \quad (a \times b)^n = a^n \times b^n.$$

Exemple – $10^3 \times 10^{-5} = 10^{3+(-5)} = 10^{-2}$; $(10^{-3})^2 = 10^{-6}$.

Définition – notation scientifique

Un nombre est en notation scientifique s'il s'écrit $a \times 10^n$, avec $1 \leq |a| < 10$ et n entier relatif.

Exemple – $3\,200 = 3{,}2 \times 10^3$; $0{,}000\,034 = 3{,}4 \times 10^{-5}$.

À la calculatrice. Voir l'*Annexe : prise en main de la calculatrice*, §4 (saisie d'une notation scientifique) et §5 (lecture d'un résultat).

§3. Conversions d'unités

Les **préfixes du Système international** permettent d'exprimer une grandeur en multipliant l'unité de base par une puissance de 10 :

Préfixe	Symbole	Facteur	Préfixe	Symbole	Facteur
giga	G	10^9	milli	m	10^{-3}
méga	M	10^6	micro	µ	10^{-6}
kilo	k	10^3	nano	n	10^{-9}

Exemple – $3{,}3\ V = 3{,}3 \times 10^3\ mV = 3\,300\ mV$; $20\ \mu s = 20 \times 10^{-6}\ s = 2 \times 10^{-5}\ s$.

Méthode – conversion d'une aire ou d'un volume

Pour convertir une aire ou un volume entre deux unités, on convertit d'abord la dimension linéaire correspondante, puis on l'élève à la puissance appropriée.
Aire : 1 mm $= 10^{-3}$ m, donc 1 mm$^2 = (10^{-3})^2$ m$^2 = 10^{-6}$ m^2.
Volume : 1 mm $= 10^{-1}$ cm, donc 1 mm$^3 = (10^{-1})^3$ cm$^3 = 10^{-3}$ cm^3.

Point de vigilance. L'erreur classique est de croire que 1 mm$^2 = 10^{-3}$ m^2 (faux : l'exposant doit aussi être au carré).

§4. Isoler une grandeur dans une formule

Dans un calcul métier, on n'utilise pas toujours une formule dans le sens où elle est écrite. Si l'on connaît certaines grandeurs et que l'on cherche celle qui reste, il faut *isoler* cette grandeur.

Méthode – isoler une grandeur

On effectue les opérations inverses, dans l'ordre inverse, sur les deux membres de l'égalité, jusqu'à ce que la grandeur cherchée soit seule.

- Pour annuler une addition, on soustrait ; pour annuler une soustraction, on additionne.
- Pour annuler une multiplication, on divise ; pour annuler une division, on multiplie.
- Pour annuler un carré (sur un nombre positif), on prend la racine carrée.

Exemple – Isoler I dans $U = R \times I$. On divise les deux membres par R : $\dfrac{U}{R} = I$, soit $I = \dfrac{U}{R}$.

Exemple – Isoler h dans $V = L \times \ell \times h$. On divise par $L \times \ell$: $h = \dfrac{V}{L \times \ell}$.

Exemple – Isoler r dans $S = \pi r^2$. On divise par π : $\dfrac{S}{\pi} = r^2$. Puis on prend la racine carrée : $r = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$.

Exercices classiques

Ces exercices courts exercent les gestes mathématiques vus dans le rappel, sans contexte métier. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. Les huit premiers sont à traiter en priorité ; les quatre suivants, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Simplifier les fractions suivantes au maximum.

$$\frac{12}{18}, \quad \frac{15}{25}, \quad \frac{42}{56}.$$

Corrigé

$$\frac{12}{18} = \frac{12/6}{18/6} = \frac{2}{3}\,; \quad \frac{15}{25} = \frac{15/5}{25/5} = \frac{3}{5}\,; \quad \frac{42}{56} = \frac{42/14}{56/14} = \frac{3}{4}.$$

Exercice 2

Calculer en réduisant au même dénominateur :

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4}, \qquad \frac{5}{6} - \frac{1}{2}.$$

Corrigé

$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$; $\frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Exercice 3

Calculer (puis simplifier) :

$$\frac{3}{5} \times \frac{10}{9}, \qquad \frac{5}{4} \div \frac{2}{3}.$$

Corrigé

$\frac{3}{5} \times \frac{10}{9} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$; $\frac{5}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{8}$.

Exercice 4

Calculer sans calculatrice :

$$2^5, \qquad 10^{-2}, \qquad (-3)^2, \qquad 5^0.$$

Corrigé

$2^5 = 32$; $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$; $(-3)^2 = 9$; $5^0 = 1$.

Exercice 5

Écrire en notation scientifique :

$$0{,}000\,034, \qquad 5\,200\,000, \qquad 12{,}5.$$

Corrigé

$0{,}000\,034 = 3{,}4 \times 10^{-5}$; $5\,200\,000 = 5{,}2 \times 10^{6}$; $12{,}5 = 1{,}25 \times 10^{1}$.

Exercice 6

Effectuer les conversions de longueur ou de durée :

- 250 mm en m ;
- 0,04 km en m ;
- 1,5 h en s.

Corrigé

250 mm $= 250 \times 10^{-3}$ m $= 0{,}25$ m ; $0{,}04$ km $= 0{,}04 \times 10^{3}$ m $= 40$ m ; $1{,}5$ h $= 1{,}5 \times 3\,600$ s $= 5\,400$ s.

Exercice 7

Convertir 400 mm^2 en cm^2 puis en m^2, en passant explicitement par la dimension linéaire.

Corrigé

$1\ \text{mm} = 10^{-1}\ \text{cm}$, donc $1\ \text{mm}^2 = 10^{-2}\ \text{cm}^2$, donc $400\ \text{mm}^2 = 4\ \text{cm}^2$.
$1\ \text{mm} = 10^{-3}\ \text{m}$, donc $1\ \text{mm}^2 = 10^{-6}\ \text{m}^2$, donc $400\ \text{mm}^2 = 4 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$.

Exercice 8

Dans chacune des relations suivantes, isoler la grandeur indiquée.

- Dans $y = 3x + 2$, exprimer x en fonction de y.
- Dans $v = \dfrac{d}{t}$, exprimer d, puis t.
- Dans $P = U \times I$, exprimer I.

Corrigé

$y = 3x + 2 \Rightarrow y - 2 = 3x \Rightarrow x = \dfrac{y-2}{3}$.
$v = \dfrac{d}{t} \Rightarrow d = v \times t\ ;\quad \text{et } t = \dfrac{d}{v}$.
$P = U \times I \Rightarrow I = \dfrac{P}{U}$.

Pour aller plus loin

Exercice 9

Calculer :

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2}.$$

Corrigé

Dénominateur commun 12 : $\dfrac{9}{12} + \dfrac{10}{12} - \dfrac{6}{12} = \dfrac{13}{12}$.

Exercice 10

Simplifier l'expression à l'aide des règles de calcul sur les puissances :

$$\frac{10^5 \times 10^{-2}}{10^4}.$$

Corrigé

$\dfrac{10^5 \times 10^{-2}}{10^4} = \dfrac{10^{5-2}}{10^4} = \dfrac{10^3}{10^4} = 10^{3-4} = 10^{-1} = 0{,}1$.

Exercice 11

Convertir 2 500 mm^3 en cm^3, puis en litres ($1\ \text{L} = 10^3\ \text{cm}^3$).

Corrigé

$1~\text{mm}^3 = 10^{-3}~\text{cm}^3$, donc $2\,500~\text{mm}^3 = 2{,}5~\text{cm}^3$.
Puis $2{,}5~\text{cm}^3 = 2{,}5 \times 10^{-3}~\text{L} = 0{,}002\,5~\text{L}$.

Exercice 12

Isoler h dans la formule du volume d'un cylindre $V = \pi\, r^2\, h$, puis isoler r dans la même formule.

Corrigé

$h = \dfrac{V}{\pi\, r^2}$.

Pour isoler r : on divise par $\pi\, h$: $\dfrac{V}{\pi\, h} = r^2$, puis on prend la racine carrée : $r = \sqrt{\dfrac{V}{\pi\, h}}$.

Activités d'application

Activité 1 • Préfixes du Système international — ÉLECTRONIQUE

Outil réinvesti : *notation scientifique, conversions* ***Lien référentiel :*** *S1 — grandeurs et unités*

Les préfixes du Système international permettent d'exprimer des grandeurs très grandes ou très petites :

Préfixe	Symbole	Facteur
giga	G	10^9
méga	M	10^6
kilo	k	10^3
milli	m	10^{-3}
micro	µ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}

1. Un disque dur a une capacité de 500 Go. Exprimer cette capacité en octets, en notation scientifique.
2. Un signal électrique a une période $T = 20$ µs. Exprimer cette période en secondes.
3. Une tension de 3,3 V correspond à combien de millivolts ?

Corrigé

1. $500~\text{Go} = 500 \times 10^9~\text{o} = 5 \times 10^{11}~\text{o}$.
2. $T = 20 \times 10^{-6} = 2 \times 10^{-5}$ s.
3. $3{,}3~\text{V} = 3{,}3 \times 10^3~\text{mV} = 3\,300~\text{mV}$.

Activité 2 • Bits et octets — ÉLECTRONIQUE

Outil réinvesti : *conversion, notation scientifique* ***Lien référentiel :*** *S2 — codage de l'information*

Un octet (noté `o`) vaut 8 bits (notés `b`). Cette unité sert à mesurer les quantités d'information stockées ou transmises. Pour les capacités et débits annoncés par les constructeurs, on prendra $1~\text{ko} = 10^3~\text{o}$, $1~\text{Mo} = 10^6~\text{o}$, $1~\text{Go} = 10^9~\text{o}$.

1. Une image pèse 2 Mo. Convertir cette taille en bits, en notation scientifique.
2. Un fichier vidéo de 4 Go doit être transféré. Exprimer sa taille en bits.
3. La mémoire RAM d'un microcontrôleur est de 32 ko. Combien d'octets cela représente-t-il

?

Corrigé

1. 2 Mo $= 2 \times 10^6$ o, et $2 \times 10^6 \times 8 = 16 \times 10^6 = 1{,}6 \times 10^7$ b.
2. 4 Go $= 4 \times 10^9$ o, et $4 \times 10^9 \times 8 = 32 \times 10^9 = 3{,}2 \times 10^{10}$ b.
3. 32 ko $= 32 \times 10^3 = 32\,000$ o.

Activité 3 • Loi d'Ohm sur une carte électronique ÉLECTRONIQUE

***Outil réinvesti :** application d'une formule, isoler une grandeur, préfixes (mA)* ***Lien référentiel :** C04 — lois de l'électricité*

Sur une carte électronique, une LED est alimentée à travers une résistance de protection. La loi d'Ohm s'écrit $U = R \times I$.

1. Une résistance $R = 220\ \Omega$ est traversée par un courant $I = 10$ mA. Calculer la tension à ses bornes.
2. On souhaite limiter le courant dans une LED à 5 mA alors que la résistance doit absorber une tension de 3 V. Calculer la valeur de la résistance à choisir. (isoler R)

Corrigé

1. $I = 10$ mA $= 10 \times 10^{-3} = 0{,}01$ A, donc $U = 220 \times 0{,}01 = 2{,}2$ V.
2. $I = 5 \times 10^{-3}$ A, donc $R = \dfrac{U}{I} = \dfrac{3}{5 \times 10^{-3}} = 600\ \Omega$.

Activité 4 • Bilan de puissance d'un poste informatique ÉLECTRONIQUE

***Outil réinvesti :** application d'une formule, conversion d'énergie* ***Lien référentiel :** C09 — installer un système (énergie électrique)*

La puissance électrique consommée par un appareil vaut $P = U \times I$. L'énergie consommée pendant une durée t vaut $W = P \times t$.
Un poste de travail informatique est alimenté en $U = 230$ V et consomme un courant moyen $I = 1{,}5$ A.

1. Calculer la puissance moyenne P consommée par le poste, en watts puis en kilowatts.
2. Le poste fonctionne 8 h par jour. Calculer l'énergie W consommée chaque jour, en kWh.
3. Sachant que 1 kWh $= 3{,}6 \times 10^6$ J, exprimer cette énergie en joules.

Corrigé

1. $P = 230 \times 1{,}5 = 345$ W $= 0{,}345$ kW.
2. $W = 0{,}345 \times 8 = 2{,}76$ kWh.
3. $W = 2{,}76 \times 3{,}6 \times 10^6 \approx 9{,}94 \times 10^6$ J.

Activité 5 • Refroidissement d'un serveur par circulation d'eau PHYSIQUE APPLIQUÉE

***Outil réinvesti :** application d'une formule* ***Lien référentiel :** Physique-chimie — thermique (capacité thermique massique)*

Pour évacuer la chaleur dégagée par un serveur, on fait circuler de l'eau autour des composants. L'eau absorbe l'énergie selon $Q = m \times c \times \Delta T$, où c est la capacité thermique massique du fluide. Pour l'eau, $c = 4\,180$ J/(kg · K).

Une boucle de refroidissement fait circuler $m = 5$ kg d'eau qui s'échauffe de $\Delta T = 8$ °C en absorbant la chaleur.

1. Calculer la quantité de chaleur Q absorbée par l'eau (en joules).
2. Convertir le résultat en kilojoules.

Corrigé

1. $Q = 5 \times 4\,180 \times 8 = 167\,200$ J.
2. $Q \approx 167$ kJ.

Activité 6 • Vitesse de propagation d'un signal dans un câble PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *application d'une formule, isoler une grandeur, notation scientifique* ***Lien référentiel :*** *Physique-chimie — propagation des signaux*

Un signal électrique se propage dans un câble en cuivre à environ $v = 2 \times 10^8$ m/s (environ deux tiers de la vitesse de la lumière dans le vide). Pour parcourir une distance d, il met un temps $t = d/v$.

1. Calculer le temps mis par un signal pour parcourir un câble de 100 m (résultat en notation scientifique, puis en nanosecondes).
2. À quelle distance correspond un retard de 1 µs ? (isoler d)

Corrigé

1. $t = \dfrac{100}{2 \times 10^8} = 5 \times 10^{-7}$ s $= 500$ ns.
2. $d = v \times t = 2 \times 10^8 \times 10^{-6} = 200$ m.