Chapitre 2

Semaine 2 : Proportionnalité et géométrie de base

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) des exercices classiques d'application directe (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte CIEL, qui réinvestissent ces notions dans des situations métier.

Rappel mathématique

Cette deuxième semaine consolide les outils qui interviennent dans presque tous les calculs métier : reconnaître une situation de proportionnalité et l'exploiter, manier les pourcentages dans les deux sens, lire une échelle, et appliquer correctement les formules d'aires et de volumes usuels.

§1. Proportionnalité

Définition – deux grandeurs proportionnelles

Deux grandeurs x et y sont *proportionnelles* si le rapport $\dfrac{y}{x}$ est constant. Ce rapport est appelé **coefficient de proportionnalité**, noté k : $y = k \times x$.

Exemple – Le prix à payer pour de l'essence est proportionnel au volume servi : si 20 *L coûtent* 34 *€, alors* $k = \dfrac{34}{20} = 1{,}70$ *€/L.*

Propriété – produit en croix

Si quatre nombres a, b, c, d (avec b et d non nuls) vérifient $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, alors $a \times d = b \times c$. On peut isoler n'importe laquelle des quatre grandeurs si l'on connaît les trois autres.

Exemple – Si $\dfrac{a}{3} = \dfrac{20}{12}$*, alors* $a \times 12 = 3 \times 20$*, soit* $a = \dfrac{60}{12} = 5$.

Point de vigilance. Avant d'appliquer le produit en croix, il faut s'assurer que la situation est bien proportionnelle. Par exemple, l'âge et la taille d'un enfant ne le sont pas.

§2. Pourcentages

Définition – pourcentage

Un pourcentage $p\,\%$ représente la fraction $\frac{p}{100}$. Calculer $p\,\%$ d'une quantité Q, c'est calculer $\frac{p}{100} \times Q$.

Exemple – *30 % de 250 € vaut* $\frac{30}{100} \times 250 = 75$ €.

Méthode – augmentation et diminution

Augmenter une quantité de $p\,\%$ revient à la multiplier par $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.
Diminuer une quantité de $p\,\%$ revient à la multiplier par $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

Exemple – Un prix de 80 € subit une hausse de 15 % : nouveau prix $= 80 \times 1{,}15 = 92$ €.
Une remise de 20 % sur 80 € : prix soldé $= 80 \times 0{,}80 = 64$ €.

Point de vigilance. Une hausse de 20 % suivie d'une baisse de 20 % ne ramène pas au prix initial : $100 \times 1{,}20 \times 0{,}80 = 96$, pas 100.

§3. Échelles

Définition – échelle

Sur un plan ou une carte, l'*échelle* est le rapport entre une longueur sur le plan et la longueur réelle correspondante, exprimées dans la même unité :

$$\text{échelle} = \frac{\text{longueur sur le plan}}{\text{longueur réelle}}.$$

Une échelle s'écrit souvent sous la forme $1 : n$ (un sur n). Avec une échelle $1 : 50$, 1 cm sur le plan représente 50 cm en réalité ; ou encore, 1 mm sur le plan représente 50 mm.

Exemple – Sur un plan à l'échelle $1 : 100$, *un mur mesure 4 cm. Sa longueur réelle est* $4 \times 100 = 400$ *cm* $= 4$ *m.*

§4. Aires usuelles

Propriété – formules d'aires

Rectangle de longueur L et largeur ℓ : $S = L \times \ell$.
Triangle de base b et hauteur h : $S = \frac{b \times h}{2}$.
Disque de rayon r : $S = \pi r^2$. Circonférence (périmètre) : $\mathcal{P} = 2\pi r$.

Exemple – Disque de rayon $r = 5$ *cm :* $S = \pi \times 5^2 = 25\pi \approx 78{,}5$ *cm*^{2}.

Conversions d'aires. Pour passer d'une unité d'aire à une autre, on convertit la dimension linéaire correspondante et on élève au carré (voir semaine 1, §3).

§5. Volumes usuels

Propriété – formules de volumes

Parallélépipède rectangle de longueur L, largeur ℓ, hauteur h : $V = L \times \ell \times h$.
Cylindre de rayon r et hauteur h : $V = \pi r^2 h$.
Sphère de rayon r : $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Exemple – Cylindre de rayon $r = 2$ cm et hauteur $h = 10$ cm : $V = \pi \times 2^2 \times 10 = 40\pi \approx 125{,}7$ *cm*^{3}.

Conversions de volumes. Pour passer d'une unité de volume à une autre, on convertit la dimension linéaire et on élève au cube (voir semaine 1, §3).

Exercices classiques

Les huit premiers sont à traiter en priorité ; les quatre suivants, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Quatre stylos coûtent 6 €. En supposant la proportionnalité, calculer le prix de 10 stylos, puis combien on peut en acheter avec 21 €.

Réponse :

Exercice 2

Une voiture parcourt 180 km en 2 h à vitesse constante. Calculer la distance parcourue en 3 h 30 min (avec produit en croix).

Réponse :

Exercice 3

Calculer mentalement (ou en posant le calcul) :

- 25 % de 200 € ;
- 10 % de 45 kg ;
- 75 % de 80 m.

Réponse :

Exercice 4

Un article coûte 120 €. Calculer son nouveau prix après :

- une augmentation de 15 % ;
- une remise de 30 %.

Réponse :

Exercice 5

Sur un plan à l'échelle 1 : 50, une pièce mesure 8 cm de long et 6 cm de large. Calculer ses dimensions réelles, en mètres.

Réponse :

Exercice 6

Calculer l'aire des figures suivantes.

- Rectangle de longueur 12 cm et largeur 5 cm.
- Triangle de base 8 cm et hauteur 6 cm.
- Disque de rayon 4 cm (valeur exacte, puis approchée au dixième).

Réponse :

Exercice 7

Calculer le volume des solides suivants.

- Parallélépipède rectangle de dimensions 10 cm $\times$ 6 cm $\times$ 4 cm.
- Cylindre de rayon 3 cm et hauteur 10 cm (valeur exacte puis approchée).

Réponse :

Exercice 8

Un disque de rayon r a une aire de $S = 100\,\pi$ cm^2. Calculer la valeur de r.

Réponse :

Pour aller plus loin

Exercice 9

Le prix d'un produit augmente de 20 %, puis baisse de 20 %. Le prix de départ étant de 100 €, calculer le prix final. Que constate-t-on ?

Réponse :

Exercice 10

Sur un plan à l'échelle 1 : 200, on mesure 35 mm entre deux points. Quelle est la distance réelle correspondante, en mètres ?

Réponse :

Exercice 11

Un cylindre a une hauteur $h = 20$ cm et un volume $V = 500\,\pi$ cm^3. Calculer son rayon r.

Réponse :

Exercice 12

Un terrain rectangulaire mesure 30 m de long et 20 m de large.

- Calculer son aire en mètres carrés.
- Sur un plan à l'échelle 1 : 500, quelles sont les dimensions du terrain sur le plan, en centimètres ?

Réponse :

Activités d'application

Activité 1 • Temps de téléchargement d'un fichier ÉLECTRONIQUE

Outil réinvesti : *proportionnalité, application d'une formule, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :*** *C10 — exploiter un réseau (débits)*

Le temps de téléchargement d'un fichier est proportionnel à sa taille, à débit constant : $t = \frac{\text{taille}}{\text{débit}}$. **Attention :** le débit s'exprime souvent en bits par seconde (Mb/s), tandis que la taille d'un fichier s'exprime en octets (Mo).

Une connexion ADSL offre un débit descendant de 10 Mb/s.

1. Convertir ce débit en mégaoctets par seconde (Mo/s) en utilisant 1 o = 8 b.
2. Calculer le temps nécessaire au téléchargement d'un fichier de 50 Mo, en secondes.
3. Pour télécharger un film de 1,5 Go avec cette connexion, combien de temps faut-il ? (résultat en minutes)

Réponse :

Activité 2 • Pourcentage de remplissage d'un disque ÉLECTRONIQUE

Outil réinvesti : *pourcentage, proportionnalité* ***Lien référentiel :*** *C10 — exploiter un réseau (stockage)*

Un serveur dispose d'un disque dur de capacité totale $C = 2$ To. À un instant donné, 1 500 Go sont utilisés.

1. Convertir la capacité totale en gigaoctets (1 To = 10^3 Go).
2. Calculer le pourcentage de remplissage du disque.
3. Une alerte se déclenche à 90 % de remplissage. Combien d'octets supplémentaires peuvent être stockés avant l'alerte ?

Réponse :

Activité 3 • Section d'un câble réseau, conversion $\text{mm}^2 \to \text{m}^2$ ÉLECTRONIQUE

***Outil réinvesti :** formule d'aire, conversion d'unités* ***Lien référentiel :** C09 — installer un réseau (câblage)*

Un câble réseau Ethernet contient quatre paires de conducteurs en cuivre. Chaque conducteur est circulaire et de rayon $r = 0{,}5$ mm. La section d'un conducteur circulaire vaut $S = \pi r^2$.

1. Calculer la section S d'un conducteur, en mm^2 (résultat arrondi au centième).
2. Exprimer 1 mm en mètres sous la forme d'une puissance de 10, puis en déduire à quoi est égal 1 mm^2 en m^2.
3. En déduire S en m^2.

Réponse :

Activité 4 • Volume et masse de cuivre dans un câble ÉLECTRONIQUE

***Outil réinvesti :** volume d'un cylindre, conversion $mm^3 \to cm^3$, masse volumique* ***Lien référentiel :** C09 — choix des câbles, devis matière*

La quantité de cuivre dans un câble se calcule à partir de la section utile S et de la longueur L : $V = S \times L$. La masse correspondante se déduit de la masse volumique : $m = \rho \times V$. Pour le cuivre, $\rho = 8{,}9$ g/cm^3.

Un câble réseau de 100 m a une section utile de cuivre totale $S = 4$ mm^2 (somme des sections de tous les conducteurs).

1. Exprimer L en mm, puis calculer le volume V de cuivre en mm^3.
2. Exprimer 1 mm en cm sous la forme d'une puissance de 10, puis en déduire à quoi est égal 1 mm^3 en cm^3.
3. En déduire V en cm^3.
4. Calculer la masse m de cuivre du câble, en grammes puis en kilogrammes.

Réponse :

Activité 5 • Lecture d'un plan de câblage à l'échelle — ÉLECTRONIQUE

Outil réinvesti : *proportionnalité, échelle* ***Lien référentiel :*** *C09 — lecture de plans*

Le plan d'implantation d'un local technique est tracé à l'échelle **1:20** : une longueur réelle est vingt fois la longueur correspondante sur le plan.

1. Sur le plan, le cheminement d'un câble mesure 35 mm. Quelle est la longueur réelle de câble nécessaire ?
2. La salle serveur mesure réellement 6 m de long. Quelle est sa longueur sur le plan, en mm ?

Réponse :

Activité 6 • Identifier un matériau par sa masse volumique — PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *proportionnalité, application de formule* ***Lien référentiel :*** *Physique-chimie — matière et matériaux*

La masse volumique relie la masse m d'un échantillon à son volume V.

1. Écrire la relation entre ρ, m et V.
2. Un échantillon a une masse $m = 270$ g pour un volume $V = 100$ cm^3. Calculer ρ, en g/cm^3.
3. Sachant que l'aluminium a $\rho = 2{,}7$ g/cm^3, de quel matériau s'agit-il probablement ?

Réponse :

Activité 7 • Dilatation linéaire d'un câble — PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *proportionnalité, application d'une formule, notation scientifique* ***Lien référentiel :*** *Physique-chimie — thermique (dilatation)*

La variation de longueur d'un câble due à un changement de température suit $\Delta L = \alpha \times L \times \Delta T$. Pour le cuivre, $\alpha = 17 \times 10^{-6}$ K^{-1}.
Une ligne de cuivre de $L = 200$ m subit une variation $\Delta T = 40$ K entre l'hiver et l'été.

1. Calculer ΔL en mètres.
2. Convertir le résultat en millimètres.

Réponse :