

Chapitre 3

Semaine 3 : Trigonométrie

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) des exercices classiques d'application directe (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte CIEL, qui réinvestissent ces notions dans des situations métier.

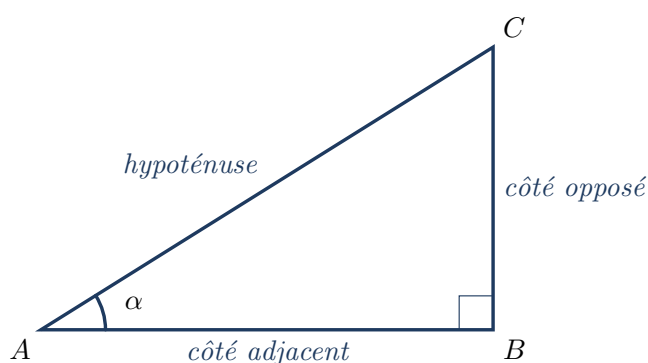
Rappel mathématique

Cette semaine consolide les outils de la trigonométrie du triangle rectangle : théorème de Pythagore, et relations entre les côtés et les angles via sinus, cosinus et tangente. Ces outils sont mobilisés dès qu'on travaille sur une géométrie inclinée, une force décomposée, ou un signal périodique.

§1. Triangle rectangle : vocabulaire

Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit est appelé **hypoténuse** ; c'est toujours le côté le plus long. Les deux autres côtés forment les *côtés de l'angle droit*. Pour un angle aigu α donné du triangle, on distingue :

- le **côté opposé** à α : le côté qui ne touche pas α ;
- le **côté adjacent** à α : le côté de l'angle droit qui touche α .



§2. Théorème de Pythagore

Propriété – théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés :

$$(\text{hypoténuse})^2 = (\text{côté 1})^2 + (\text{côté 2})^2.$$

Exemple – Pour un triangle rectangle de côtés $a = 3$, $b = 4$: l'hypoténuse vaut $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Réciproque utile. Si l'on connaît l'hypoténuse c et un côté a , on isole l'autre côté : $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

§3. Sinus, cosinus, tangente

Définition – rapports trigonométriques

Pour un angle aigu α d'un triangle rectangle :

$$\sin \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$

Moyen mnémotechnique : SOH-CAH-TOA. *Sinus = Opposé / Hypoténuse, Cosinus = Adjacent / Hypoténuse, Tangente = Opposé / Adjacent.*

Exemple – Dans un triangle rectangle avec $\alpha = 30^\circ$, $\sin 30^\circ = 0,5$. Si l'hypoténuse vaut 10 cm, le côté opposé vaut $10 \times 0,5 = 5$ cm.

§4. Valeurs particulières

Propriété – angles remarquables

Angle α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

On retient au minimum $\sin 30^\circ = 0,5$ et $\cos 60^\circ = 0,5$: les autres se retrouvent à la calculatrice.

À la calculatrice. Avant tout calcul de sinus, cosinus ou tangente, vérifier que la calculatrice est bien en mode **degré** (voir l'Annexe : prise en main de la calculatrice, §1).

§5. Trouver un angle à partir d'un rapport

Méthode – retrouver un angle (trigonométrie inverse)

Si l'on connaît la valeur d'un rapport trigonométrique et qu'on cherche l'angle correspondant, on utilise les fonctions *inverses* :

$$\alpha = \sin^{-1}(\dots) \quad \text{ou} \quad \alpha = \cos^{-1}(\dots) \quad \text{ou} \quad \alpha = \tan^{-1}(\dots).$$

On les note aussi arcsin, arccos, arctan. La calculatrice y accède par SHIFT puis la touche correspondante.

Exemple – Si $\tan \alpha = 0,75$, alors $\alpha = \tan^{-1}(0,75) \approx 36,87^\circ$.

Point de vigilance. L'unité du résultat dépend du mode actif. En mode degré, $\tan^{-1}(1) = 45^\circ$; en mode radian, $\tan^{-1}(1) \approx 0,7854$. **Toujours vérifier le mode** (voir Annexe Calculatrice §8).

Exercices classiques

Les huit premiers sont à traiter en priorité ; les quatre suivants, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Un triangle rectangle a des côtés de l'angle droit $a = 6$ cm et $b = 8$ cm. Calculer la longueur de l'hypoténuse.

Corrigé

$$c = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm.}$$

Exercice 2

Un triangle rectangle a une hypoténuse $c = 13$ cm et un côté $a = 5$ cm. Calculer la longueur du second côté.

Corrigé

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm.}$$

Exercice 3

Calculer (à la calculatrice, en mode degré) :

$$\sin 30^\circ, \quad \cos 60^\circ, \quad \tan 45^\circ, \quad \sin 90^\circ.$$

Corrigé

$$\sin 30^\circ = 0,5 ; \quad \cos 60^\circ = 0,5 ; \quad \tan 45^\circ = 1 ; \quad \sin 90^\circ = 1.$$

Exercice 4

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse mesure 10 cm et l'un des angles aigus vaut $\alpha = 30^\circ$. Calculer la longueur du côté opposé à α .

Corrigé

$$\sin \alpha = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}, \text{ donc opposé} = 10 \times \sin 30^\circ = 10 \times 0,5 = 5 \text{ cm.}$$

Exercice 5

Dans un triangle rectangle, le côté adjacent à $\alpha = 40^\circ$ mesure 8 cm. Calculer la longueur de l'hypoténuse (résultat arrondi au dixième).

Corrigé

$$\cos \alpha = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}, \text{ donc hypoténuse} = \frac{8}{\cos 40^\circ} \approx \frac{8}{0,766} \approx 10,4 \text{ cm.}$$

Exercice 6

Dans un triangle rectangle, le côté opposé à α mesure 7 cm et le côté adjacent mesure 24 cm. Calculer l'angle α (résultat arrondi au degré).

Corrigé

$$\tan \alpha = \frac{7}{24} \approx 0,292, \text{ donc } \alpha = \tan^{-1}(0,292) \approx 16^\circ.$$

Exercice 7

Un triangle rectangle a une hypoténuse de 15 cm et un côté opposé à un angle α de 9 cm. Calculer l'angle α (résultat arrondi au degré).

Corrigé

$$\sin \alpha = \frac{9}{15} = 0,6, \text{ donc } \alpha = \sin^{-1}(0,6) \approx 37^\circ.$$

Exercice 8

Vérifier sur sa calculatrice qu'on est bien en mode degré, en calculant $\sin 90^\circ$. Quel résultat doit-on obtenir ? Et si le mode est radian, que donne le calcul ?

Corrigé

En mode degré : $\sin 90^\circ = 1$ (exactement).

En mode radian : $\sin 90 \approx 0,894$ (la calculatrice interprète 90 comme 90 radians). Si l'on obtient ce résultat, c'est qu'il faut basculer en mode degré.

————— *Pour aller plus loin* —————

Exercice 9

Un triangle rectangle a une hypoténuse de longueur c . Démontrer, à partir des définitions, que pour tout angle aigu α de ce triangle on a $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$.

Corrigé

Soit a le côté opposé à α , b le côté adjacent. Alors $\sin \alpha = a/c$ et $\cos \alpha = b/c$. Donc

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1,$$

par le théorème de Pythagore.

Exercice 10

Une échelle est appuyée contre un mur. Elle mesure 5 m et fait un angle de 70° avec le sol. Calculer la hauteur atteinte sur le mur (résultat arrondi au centimètre).

Corrigé

La hauteur est le côté opposé à l'angle 70° ; l'échelle est l'hypoténuse.

$$\text{Hauteur} = 5 \times \sin 70^\circ \approx 5 \times 0,9397 \approx 4,70 \text{ m} = 470 \text{ cm}.$$

Exercice 11

Un triangle rectangle a pour côtés 1, $\sqrt{3}$, 2. Identifier l'hypoténuse, puis calculer les trois angles (aidé du tableau des valeurs particulières).

Corrigé

L'hypoténuse est le côté le plus long : 2. On a un angle droit ; les deux autres angles α et β vérifient $\alpha + \beta = 90^\circ$.

$\sin \alpha = \frac{1}{2}$ donc $\alpha = 30^\circ$; et donc $\beta = 60^\circ$.

Exercice 12

Dans un triangle rectangle, on connaît $\sin \alpha = 0,28$. Calculer α (au degré près), puis $\cos \alpha$ et $\tan \alpha$ (à 10^{-2} près).

Corrigé

$\alpha = \sin^{-1}(0,28) \approx 16^\circ$.

$\cos \alpha \approx \cos 16^\circ \approx 0,96$; $\tan \alpha \approx \tan 16^\circ \approx 0,29$.

Activités d'application**Activité 1 • Longueur diagonale d'une baie informatique (Pythagore) ÉLECTRONIQUE**

Outil réinvesti : théorème de Pythagore **Lien référentiel** : C09 — installation de baie informatique

Pour estimer la diagonale d'une baie informatique (utile au passage de câbles entre faces), on assimile la face à un rectangle de hauteur $h = 200$ cm et de largeur $\ell = 60$ cm.

- Énoncer le théorème de Pythagore : il relie l'hypoténuse c aux deux côtés de l'angle droit a et b .
- Calculer la longueur de la diagonale, en centimètres (résultat arrondi au dixième).

Corrigé

1. $c^2 = a^2 + b^2$, donc $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2. Diagonale = $\sqrt{200^2 + 60^2} = \sqrt{40\,000 + 3\,600} = \sqrt{43\,600} \approx 208,8$ cm.

Activité 2 • Longueur d'un câble passant en hauteur (sinus) ÉLECTRONIQUE

Outil réinvesti : sinus, isoler une grandeur **Lien référentiel** : C09 — installation et passage de câbles

Un câble doit relier un boîtier au sol à un point de connexion situé en hauteur. Il chemine en ligne droite avec une inclinaison $\alpha = 30^\circ$ par rapport au sol. La hauteur à atteindre est $h = 4$ m.

Dans le triangle rectangle formé, h est le côté opposé à l'angle α et la longueur L du câble en est l'hypoténuse.

- Exprimer $\sin \alpha$ en fonction de h et L .
- En déduire la longueur L de câble nécessaire. (isoler L)

Corrigé

1. $\sin \alpha = \frac{h}{L}$.

2. $L = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{4}{\sin 30^\circ} = \frac{4}{0,5} = 8$ m.

Activité 3 • Valeur instantanée d'une tension sinusoïdale

ÉLECTRONIQUE

Outil réinvesti : sinus, application d'une formule **Lien référentiel** : C04 — caractérisation des signaux

Le secteur électrique français fournit une tension alternative dont la valeur instantanée s'écrit $u(\theta) = U_{\max} \times \sin \theta$, où U_{\max} est la tension de crête et θ l'angle (en degrés). On donne $U_{\max} = 325 \text{ V}$.

- Calculer la valeur de u pour $\theta = 30^\circ$.
- Calculer la valeur de u pour $\theta = 90^\circ$. Que représente cette valeur ?

Corrigé

- $u = 325 \times \sin 30^\circ = 325 \times 0,5 = 162,5 \text{ V}$.
- $u = 325 \times \sin 90^\circ = 325 \times 1 = 325 \text{ V}$: c'est la tension de crête (valeur maximale).

Activité 4 • Valeur efficace d'une tension sinusoïdale

ÉLECTRONIQUE

Outil réinvesti : racine carrée, application d'une formule **Lien référentiel** : C04 — caractérisation des signaux

La valeur efficace d'une tension alternative sinusoïdale est reliée à la tension de crête par $U_{\text{eff}} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$.

- Pour $U_{\max} = 325 \text{ V}$, calculer U_{eff} (résultat arrondi au volt). Que reconnaît-on ?
- À partir de la même formule, exprimer U_{\max} en fonction de U_{eff} . (isoler U_{\max})
- Un appareil indique une tension efficace de 24 V. Calculer la tension de crête correspondante.

Corrigé

- $U_{\text{eff}} = \frac{325}{\sqrt{2}} \approx 230 \text{ V}$: c'est la tension efficace du secteur français.
- $U_{\max} = U_{\text{eff}} \times \sqrt{2}$.
- $U_{\max} = 24 \times \sqrt{2} \approx 33,9 \text{ V}$.

Activité 5 • Réfraction de la lumière dans une fibre optique

PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : sinus, isoler une grandeur **Lien référentiel** : Physique-chimie — optique (fibres)

Pour qu'un signal optique soit guidé dans une fibre, la lumière y entre selon un angle bien précis. La loi de la réfraction (Snell–Descartes) est $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$, où n_1 et n_2 sont les indices des deux milieux. On donne $n_1 = 1$ (air) et $n_2 = 1,5$ (cœur de fibre). Un rayon arrive avec $i_1 = 30^\circ$.

- À partir de la loi de réfraction, exprimer $\sin i_2$. (isoler $\sin i_2$)
- Calculer $\sin i_2$, puis en déduire l'angle de réfraction i_2 .

Corrigé

- $\sin i_2 = \frac{n_1 \sin i_1}{n_2}$.
- $\sin i_2 = \frac{1 \times 0,5}{1,5} \approx 0,333$, donc $i_2 \approx 19,5^\circ$. Le rayon se rapproche de la normale en entrant dans la fibre.

Activité 6 • Période et fréquence d'un signal sinusoïdal

PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : application d'une formule, isoler une grandeur **Lien référentiel** : Physique-chimie — signaux périodiques

La fréquence f d'un signal périodique est l'inverse de sa période : $f = 1/T$, avec T en secondes et f en hertz.

1. Un signal a une période $T = 20$ ms. Convertir T en secondes puis calculer la fréquence f .
2. Un signal a une fréquence $f = 50$ kHz. Convertir f en Hz, puis calculer la période T en secondes, puis en microsecondes. (isoler T)

Corrigé

1. $T = 20 \times 10^{-3} = 0,02$ s, donc $f = \frac{1}{0,02} = 50$ Hz.

2. $f = 50 \times 10^3 = 50\,000$ Hz, donc $T = \frac{1}{50\,000} = 2 \times 10^{-5}$ s = 20 μ s.