Chapitre 3

Semaine 3 : Trigonométrie

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) des exercices classiques d'application directe (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte CIEL, qui réinvestissent ces notions dans des situations métier.

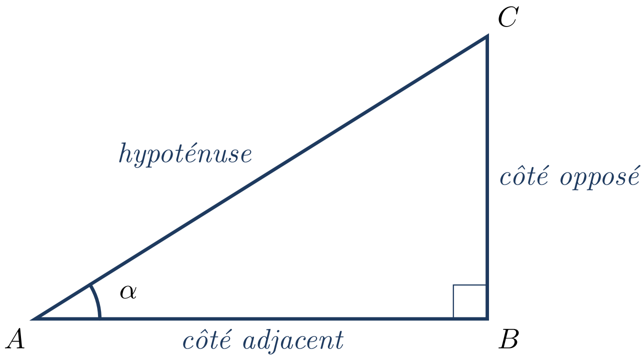
Rappel mathématique

Cette semaine consolide les outils de la trigonométrie du triangle rectangle : théorème de Pythagore, et relations entre les côtés et les angles via sinus, cosinus et tangente. Ces outils sont mobilisés dès qu'on travaille sur une géométrie inclinée, une force décomposée, ou un signal périodique.

§1. Triangle rectangle : vocabulaire

Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit est appelé **hypoténuse** ; c'est toujours le côté le plus long. Les deux autres côtés forment les *côtés de l'angle droit*. Pour un angle aigu α donné du triangle, on distingue :

- le **côté opposé** à α : le côté qui ne touche pas α ;
- le **côté adjacent** à α : le côté de l'angle droit qui touche α.



§2. Théorème de Pythagore

Propriété – théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés :

$$(\text{hypoténuse})^2 = (\text{côté } 1)^2 + (\text{côté } 2)^2\,.$$

Exemple – Pour un triangle rectangle de côtés $a = 3$, $b = 4$ *: l'hypoténuse vaut* $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Réciproque utile. Si l'on connaît l'hypoténuse c et un côté a, on isole l'autre côté : $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

§3. Sinus, cosinus, tangente

Définition – rapports trigonométriques

Pour un angle aigu α d'un triangle rectangle :

$$\sin\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}, \quad \cos\alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}, \quad \tan\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$

Moyen mnémotechnique : SOH-CAH-TOA. *Sinus = Opposé / Hypoténuse, Cosinus = Adjacent / Hypoténuse, Tangente = Opposé / Adjacent.*

Exemple – Dans un triangle rectangle avec $\alpha = 30°$, $\sin 30° = 0{,}5$. *Si l'hypoténuse vaut* 10 *cm, le côté opposé vaut* $10 \times 0{,}5 = 5$ *cm.*

§4. Valeurs particulières

Propriété – angles remarquables

Angle α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

On retient au minimum $\sin 30° = 0{,}5$ et $\cos 60° = 0{,}5$: les autres se retrouvent à la calculatrice.

À la calculatrice. Avant tout calcul de sinus, cosinus ou tangente, vérifier que la calculatrice est bien en mode **degré** (voir l'*Annexe : prise en main de la calculatrice*, §1).

§5. Trouver un angle à partir d'un rapport

Méthode – retrouver un angle (trigonométrie inverse)

Si l'on connaît la valeur d'un rapport trigonométrique et qu'on cherche l'angle correspondant, on utilise les fonctions *inverses* :

$$\alpha = \sin^{-1}(\ldots) \quad \text{ou} \quad \alpha = \cos^{-1}(\ldots) \quad \text{ou} \quad \alpha = \tan^{-1}(\ldots).$$

On les note aussi arcsin, arccos, arctan. La calculatrice y accède par `SHIFT` puis la touche correspondante.

Exemple – Si $\tan\alpha = 0{,}75$, *alors* $\alpha = \tan^{-1}(0{,}75) \approx 36{,}87°$.

Point de vigilance. L'unité du résultat dépend du mode actif. En mode degré, $\tan^{-1}(1) = 45°$; en mode radian, $\tan^{-1}(1) \approx 0{,}785\,4$. **Toujours vérifier le mode** (voir Annexe Calculatrice §8).

Exercices classiques

Les huit premiers sont à traiter en priorité ; les quatre suivants, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Un triangle rectangle a des côtés de l'angle droit $a = 6$ cm et $b = 8$ cm. Calculer la longueur de l'hypoténuse.

Réponse :

Exercice 2

Un triangle rectangle a une hypoténuse $c = 13$ cm et un côté $a = 5$ cm. Calculer la longueur du second côté.

Réponse :

Exercice 3

Calculer (à la calculatrice, en mode degré) :

$$\sin 30^\circ\,, \quad \cos 60^\circ\,, \quad \tan 45^\circ\,, \quad \sin 90^\circ\,.$$

Réponse :

Exercice 4

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse mesure 10 cm et l'un des angles aigus vaut $\alpha = 30^\circ$. Calculer la longueur du côté opposé à α.

Réponse :

Exercice 5

Dans un triangle rectangle, le côté adjacent à $\alpha = 40°$ mesure 8 cm. Calculer la longueur de l'hypoténuse (résultat arrondi au dixième).

Réponse :

Exercice 6

Dans un triangle rectangle, le côté opposé à α mesure 7 cm et le côté adjacent mesure 24 cm. Calculer l'angle α (résultat arrondi au degré).

Réponse :

Exercice 7

Un triangle rectangle a une hypoténuse de 15 cm et un côté opposé à un angle α de 9 cm. Calculer l'angle α (résultat arrondi au degré).

Réponse :

Exercice 8

Vérifier sur sa calculatrice qu'on est bien en mode degré, en calculant $\sin 90°$. Quel résultat doit-on obtenir ? Et si le mode est radian, que donne le calcul ?

Réponse :

Pour aller plus loin

Exercice 9

Un triangle rectangle a une hypoténuse de longueur c. Démontrer, à partir des définitions, que pour tout angle aigu α de ce triangle on a $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$.

Réponse :

Exercice 10

Une échelle est appuyée contre un mur. Elle mesure 5 m et fait un angle de 70° avec le sol. Calculer la hauteur atteinte sur le mur (résultat arrondi au centimètre).

Réponse :

Exercice 11

Un triangle rectangle a pour côtés 1, $\sqrt{3}$, 2. Identifier l'hypoténuse, puis calculer les trois angles (aidé du tableau des valeurs particulières).

Réponse :

Exercice 12

Dans un triangle rectangle, on connaît $\sin\alpha = 0{,}28$. Calculer α (au degré près), puis $\cos\alpha$ et $\tan\alpha$ (à 10^{-2} près).

Réponse :

Activités d'application

Activité 1 • Longueur diagonale d'une baie informatique (Pythagore) ÉLECTRONIQUE

Outil réinvesti : *théorème de Pythagore* ***Lien référentiel :*** *C09 — installation de baie informatique*

Pour estimer la diagonale d'une baie informatique (utile au passage de câbles entre faces), on assimile la face à un rectangle de hauteur $h = 200$ cm et de largeur $\ell = 60$ cm.

1. Énoncer le théorème de Pythagore : il relie l'hypoténuse c aux deux côtés de l'angle droit a et b.
2. Calculer la longueur de la diagonale, en centimètres (résultat arrondi au dixième).

Réponse :

Activité 2 • Longueur d'un câble passant en hauteur (sinus) ÉLECTRONIQUE

Outil réinvesti : *sinus, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :*** *C09 — installation et passage de câbles*

Un câble doit relier un boîtier au sol à un point de connexion situé en hauteur. Il chemine en ligne droite avec une inclinaison $\alpha = 30°$ par rapport au sol. La hauteur à atteindre est $h = 4$ m.
Dans le triangle rectangle formé, h est le côté opposé à l'angle α et la longueur L du câble en est l'hypoténuse.

1. Exprimer $\sin\alpha$ en fonction de h et L.
2. En déduire la longueur L de câble nécessaire. (isoler L)

Réponse :

Activité 3 • Valeur instantanée d'une tension sinusoïdale ÉLECTRONIQUE

Outil réinvesti : *sinus, application d'une formule* ***Lien référentiel :*** *C04 — caractérisation des signaux*

Le secteur électrique français fournit une tension alternative dont la valeur instantanée s'écrit $u(\theta) = U_{\max} \times \sin\theta$, où $U_{\max}$ est la tension de crête et θ l'angle (en degrés). On donne $U_{\max} = 325$ V.

1. Calculer la valeur de u pour $\theta = 30°$.
2. Calculer la valeur de u pour $\theta = 90°$. Que représente cette valeur ?

Réponse :

Activité 4 • Valeur efficace d'une tension sinusoïdale — ÉLECTRONIQUE

Outil réinvesti : *racine carrée, application d'une formule* ***Lien référentiel :*** *C04 — caractérisation des signaux*

La valeur efficace d'une tension alternative sinusoïdale est reliée à la tension de crête par $U_{\text{eff}} = \dfrac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$.

1. Pour $U_{\max} = 325$ V, calculer U_{eff} (résultat arrondi au volt). Que reconnaît-on ?
2. À partir de la même formule, exprimer $U_{\max}$ en fonction de U_{eff}. (isoler $U_{\max}$)
3. Un appareil indique une tension efficace de 24 V. Calculer la tension de crête correspondante.

Réponse :

Activité 5 • Réfraction de la lumière dans une fibre optique — PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *sinus, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :*** *Physique-chimie — optique (fibres)*

Pour qu'un signal optique soit guidé dans une fibre, la lumière y entre selon un angle bien précis. La loi de la réfraction (Snell–Descartes) est $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$, où n_1 et n_2 sont les indices des deux milieux. On donne $n_1 = 1$ (air) et $n_2 = 1{,}5$ (cœur de fibre). Un rayon arrive avec $i_1 = 30°$.

1. À partir de la loi de réfraction, exprimer $\sin i_2$. (isoler $\sin i_2$)
2. Calculer $\sin i_2$, puis en déduire l'angle de réfraction i_2.

Réponse :

Activité 6 • Période et fréquence d'un signal sinusoïdal — PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *application d'une formule, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :*** *Physique-chimie — signaux périodiques*

La fréquence f d'un signal périodique est l'inverse de sa période : $f = 1/T$, avec T en secondes et f en hertz.

1. Un signal a une période $T = 20$ ms. Convertir T en secondes puis calculer la fréquence f.
2. Un signal a une fréquence $f = 50$ kHz. Convertir f en Hz, puis calculer la période T en secondes, puis en microsecondes. (isoler T)

Réponse :