Chapitre 6

Semaine 6 : Dérivation

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) des exercices classiques d'application directe (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte CIEL, qui réinvestissent ces notions dans des situations métier.

Rappel mathématique

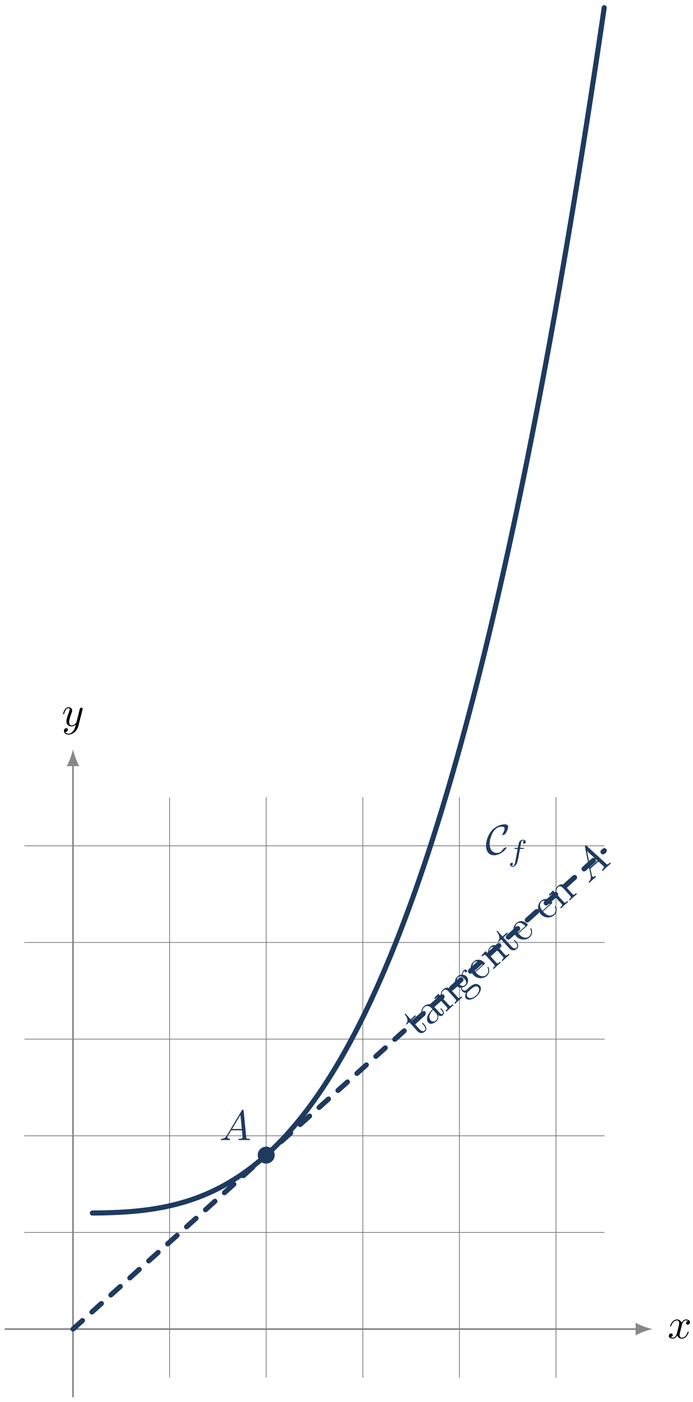
Cette semaine consolide la notion de dérivée d'une fonction et son interprétation comme taux de variation. La dérivation est l'outil de la première année de BTS pour étudier les variations, identifier les extremums et modéliser des grandeurs qui évoluent (vitesse, courant, débit).

§1. Nombre dérivé et tangente

Définition – nombre dérivé

Le *nombre dérivé* d'une fonction f en un point d'abscisse a, noté $f'(a)$, est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe représentative de f au point $(a\,;\,f(a))$.

C'est aussi le *taux de variation instantané* de f en a : il indique à quelle vitesse f change autour de cette valeur.



§2. Fonction dérivée

Définition – fonction dérivée

La fonction dérivée de f, notée f', associe à chaque x son nombre dérivé $f'(x)$ (lorsqu'il existe).

Propriété – dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
k (constante)	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	$n\,x^{n-1}$

Exemple – *Si* $f(x) = x^5$, *alors* $f'(x) = 5\,x^4$.

§3. Règles de dérivation

Propriété – opérations sur les dérivées

Pour deux fonctions u et v et un réel k :

$$(k\,u)' = k\,u'\,, \quad (u+v)' = u'+v'\,, \quad (u-v)' = u'-v'\,.$$

Ces règles permettent de dériver tous les *polynômes*.

Exemple – *Si* $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$, *alors* $f'(x) = 3 \times 2x - 5 \times 1 + 0 = 6x - 5$.

Exemple – *Si* $g(t) = t^2 + 3t$, *alors* $g'(t) = 2t + 3$.

Point de vigilance. La dérivée d'une constante est nulle : pour $f(x) = 4$, on a $f'(x) = 0$, et non 4.

§4. Interprétation : taux de variation

Méthode – interpréter f'

La dérivée $f'(a)$ donne le **taux de variation instantané** de f en a.

- Si $f'(a) > 0$, f est croissante autour de a.
- Si $f'(a) < 0$, f est décroissante autour de a.
- Si $f'(a) = 0$, la courbe a une tangente horizontale en a (souvent un *extremum*).

Exemple – *La position d'un objet mobile est* $x(t)$. *Sa vitesse instantanée est* $v(t) = x'(t)$.

Exemple – *La charge d'un condensateur est* $q(t)$. *Le courant qui le traverse est* $i(t) = q'(t)$.

§5. Optimisation : trouver un extremum

Méthode – rechercher un extremum

Pour trouver les valeurs de x où une fonction f admet un maximum ou un minimum :

1. On calcule $f'(x)$.
2. On résout $f'(x) = 0$.
3. On étudie le signe de $f'(x)$ autour des solutions trouvées pour conclure (minimum ou maximum).

Exemple – *Soit* $C(x) = x^2 - 6x + 10$. *On a* $C'(x) = 2x - 6$.
$C'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$. *Pour* $x < 3$, $C'(x) < 0$ *(décroissante) ; pour* $x > 3$, $C'(x) > 0$ *(croissante). Donc* C *admet un minimum en* $x = 3$, *et* $C(3) = 9 - 18 + 10 = 1$.

Exercices classiques

Les huit premiers sont à traiter en priorité ; les quatre suivants, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

- $f(x) = x^2$
- $f(x) = x^3$
- $f(x) = x^4$

Réponse :

Exercice 2

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

- $f(x) = 5$
- $f(x) = 3x$
- $f(x) = 7x + 4$

Réponse :

Exercice 3

Soit $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$. Calculer $f'(x)$, puis $f'(2)$.

Réponse :

Exercice 4

Soit $g(t) = 2\,t^2 + 3\,t - 1$. Calculer $g'(t)$, puis $g'(0)$ et $g'(5)$.

Réponse :

Exercice 5

Pour la fonction $f(x) = x^2$, calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 4$.

Réponse :

Exercice 6

Soit $f(x) = -x^2 + 4x$. Calculer $f'(x)$, puis résoudre $f'(x) = 0$.

Réponse :

Exercice 7

La position d'un objet mobile est donnée par $x(t) = t^2 + 2t$, avec t en secondes et x en mètres. Sa vitesse instantanée est $v(t) = x'(t)$.

- Calculer $v(t)$.
- Calculer la vitesse à $t = 5$ s.

Réponse :

Exercice 8

Soit $C(x) = x^2 - 8x + 20$ une fonction de coût. Déterminer la valeur de x qui minimise C, et calculer le coût minimal.

Réponse :

Pour aller plus loin

Exercice 9

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$. Calculer $f'(x)$, puis résoudre $f'(x) = 0$.

Réponse :

Exercice 10

Soit $f(x) = x^2$. Écrire l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 3$ (rappel : équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$).

Réponse :

Exercice 11

La charge d'un condensateur (en coulombs) suit $q(t) = 0{,}5\,t^2 + 2t$. Calculer le courant $i(t) = q'(t)$ qui le traverse, puis le courant à l'instant $t = 4$ s.

Réponse :

Exercice 12

Soit $f(x) = 2x^2 - 12x + 5$. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

Réponse :

Activités d'application

Activité 1 • Courant de charge d'un condensateur (taux de variation) ÉLECTRONIQUE

Outil réinvesti : *dérivation d'un polynôme, taux de variation* ***Lien référentiel :*** *C04 — composants passifs (condensateur)*

La charge q d'un condensateur en cours de charge (en coulombs) évolue selon $q(t) = t^2 + 3\,t$, avec t en secondes. Le courant qui le traverse à l'instant t est le taux de variation de la charge : $i(t) = q'(t)$.

1. Déterminer l'expression de $i(t)$.
2. Calculer le courant à l'instant $t = 4$ s.

Réponse :

Activité 2 • Nombre dérivé et tangente ÉLECTRONIQUE

Outil réinvesti : *nombre dérivé, coefficient directeur* ***Lien référentiel :*** *lecture d'une courbe, pente*

Soit la fonction $f(x) = x^2$. Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a.

1. Déterminer la fonction dérivée $f'(x)$.
2. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 3$.

Réponse :

Activité 3 • Optimisation du coût d'un déploiement réseau ÉLECTRONIQUE

Outil réinvesti : *dérivation, signe de la dérivée, extremum* ***Lien référentiel :*** *C03 — gestion de projet (coûts)*

Le coût total d'un déploiement réseau (matériel + main d'œuvre), exprimé en milliers d'euros, est modélisé par $C(x) = x^2 - 6x + 10$, où x est un paramètre de dimensionnement (par exemple le nombre de commutateurs choisis). Un minimum est atteint là où la dérivée s'annule.

1. Calculer $C'(x)$, puis résoudre $C'(x) = 0$.

2. En déduire le dimensionnement x qui minimise le coût, et la valeur du coût minimal.

Réponse :

Activité 4 • Débit instantané de données — ÉLECTRONIQUE

Outil réinvesti : *dérivation, taux de variation* ***Lien référentiel :*** *C10 — exploitation d'un réseau (mesure de débit)*

La quantité totale de données transférées par un serveur (en mégaoctets) évolue selon $Q(t) = t^2 + 5\,t$, avec t en minutes. Le débit instantané est le taux de variation de la quantité transférée : $D(t) = Q'(t)$.

1. Déterminer l'expression de $D(t)$, en Mo/min.
2. Calculer le débit instantané à $t = 6$ min, en Mo/min.

Réponse :

Activité 5 • Vitesse d'un objet en chute — PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *dérivation d'un polynôme* ***Lien référentiel :*** *Physique-chimie — cinématique (chute)*

La distance parcourue par un objet en chute (en mètres) est approximativement $x(t) = 5\,t^2$, avec t en secondes. La vitesse est la dérivée de la position : $v(t) = x'(t)$.

1. Déterminer $v(t)$.
2. Calculer la vitesse à $t = 3$ s.

Réponse :

Activité 6 • Vitesse de refroidissement d'un composant — PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *dérivation d'une fonction affine, signe* ***Lien référentiel :*** *Physique-chimie — thermique*

La température d'un processeur qui refroidit (en °C) suit $T(t) = 80 - 5\,t$, avec t en minutes.

1. Calculer $T'(t)$.
2. Interpréter le signe et la valeur du résultat.

Réponse :