Chapitre 2

Semaine 2 : Proportionnalité et géométrie de base

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) des exercices classiques d'application directe (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte CPI, qui réinvestissent ces notions dans des situations métier.

Rappel mathématique

Cette deuxième semaine consolide les outils qui interviennent dans presque tous les calculs métier : reconnaître une situation de proportionnalité et l'exploiter, manier les pourcentages dans les deux sens, lire une échelle, et appliquer correctement les formules d'aires et de volumes usuels.

§1. Proportionnalité

Définition – deux grandeurs proportionnelles

Deux grandeurs x et y sont *proportionnelles* si le rapport $\frac{y}{x}$ est constant. Ce rapport est appelé **coefficient de proportionnalité**, noté k : $y = k \times x$.

Exemple – Le prix à payer pour de l'essence est proportionnel au volume servi : si 20 *L coûtent* 34 *€, alors* $k = \frac{34}{20} = 1{,}70$ *€/L.*

Propriété – produit en croix

Si quatre nombres a, b, c, d (avec b et d non nuls) vérifient $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $a \times d = b \times c$. On peut isoler n'importe laquelle des quatre grandeurs si l'on connaît les trois autres.

Exemple – Si $\frac{a}{3} = \frac{20}{12}$, *alors* $a \times 12 = 3 \times 20$, *soit* $a = \frac{60}{12} = 5$.

Point de vigilance. Avant d'appliquer le produit en croix, il faut s'assurer que la situation est bien proportionnelle. Par exemple, l'âge et la taille d'un enfant ne le sont pas.

§2. Pourcentages

Définition – pourcentage

Un pourcentage $p\,\%$ représente la fraction $\frac{p}{100}$. Calculer $p\,\%$ d'une quantité Q, c'est calculer $\frac{p}{100} \times Q$.

Exemple – *30 % de 250 € vaut* $\frac{30}{100} \times 250 = 75$ *€.*

Méthode – augmentation et diminution

Augmenter une quantité de $p\,\%$ revient à la multiplier par $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.
Diminuer une quantité de $p\,\%$ revient à la multiplier par $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

Exemple – *Un prix de 80 € subit une hausse de 15 % : nouveau prix* $= 80 \times 1{,}15 = 92$ *€.*
Une remise de 20 % sur 80 € : prix soldé $= 80 \times 0{,}80 = 64$ *€.*

Point de vigilance. Une hausse de 20 % suivie d'une baisse de 20 % ne ramène pas au prix initial : $100 \times 1{,}20 \times 0{,}80 = 96$, pas 100.

§3. Échelles

Définition – échelle

Sur un plan ou une carte, l'*échelle* est le rapport entre une longueur sur le plan et la longueur réelle correspondante, exprimées dans la même unité :

$$\text{échelle} = \frac{\text{longueur sur le plan}}{\text{longueur réelle}}.$$

Une échelle s'écrit souvent sous la forme $1 : n$ (un sur n). Avec une échelle $1 : 50$, 1 cm sur le plan représente 50 cm en réalité ; ou encore, 1 mm sur le plan représente 50 mm.

Exemple – *Sur un plan à l'échelle* $1 : 100$*, un mur mesure 4 cm. Sa longueur réelle est* $4 \times 100 = 400$ *cm* $= 4$ *m.*

§4. Aires usuelles

Propriété – formules d'aires

Rectangle de longueur L et largeur ℓ : $S = L \times \ell$.
Triangle de base b et hauteur h : $S = \frac{b \times h}{2}$.
Disque de rayon r : $S = \pi r^2$. Circonférence (périmètre) : $\mathcal{P} = 2\pi r$.

Exemple – *Disque de rayon* $r = 5$ *cm :* $S = \pi \times 5^2 = 25\pi \approx 78{,}5$ *cm*^{2}.

Conversions d'aires. Pour passer d'une unité d'aire à une autre, on convertit la dimension linéaire correspondante et on élève au carré (voir semaine 1, §3).

§5. Volumes usuels

Propriété – formules de volumes

Parallélépipède rectangle de longueur L, largeur ℓ, hauteur h : $V = L \times \ell \times h$.
Cylindre de rayon r et hauteur h : $V = \pi r^2 h$.
Sphère de rayon r : $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Exemple – Cylindre de rayon $r = 2$ cm et hauteur $h = 10$ cm : $V = \pi \times 2^2 \times 10 = 40\pi \approx 125{,}7$ cm^3.

Conversions de volumes. Pour passer d'une unité de volume à une autre, on convertit la dimension linéaire et on élève au cube (voir semaine 1, §3).

Exercices classiques

Les huit premiers sont à traiter en priorité ; les quatre suivants, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Quatre stylos coûtent 6 €. En supposant la proportionnalité, calculer le prix de 10 stylos, puis combien on peut en acheter avec 21 €.

Corrigé

Coefficient : $\dfrac{6}{4} = 1{,}5$ €/stylo. Prix de 10 stylos : $10 \times 1{,}5 = 15$ €. Nombre de stylos avec 21 € : $\dfrac{21}{1{,}5} = 14$.

Exercice 2

Une voiture parcourt 180 km en 2 h à vitesse constante. Calculer la distance parcourue en 3 h 30 min (avec produit en croix).

Corrigé

3 h 30 min = 3,5 h.
$\dfrac{180}{2} = \dfrac{d}{3{,}5}$, donc $d = \dfrac{180 \times 3{,}5}{2} = 315$ km.

Exercice 3

Calculer mentalement (ou en posant le calcul) :

- 25 % de 200 € ;
- 10 % de 45 kg ;
- 75 % de 80 m.

Corrigé

$25\,\%$ de $200 = \dfrac{25}{100} \times 200 = 50$ € ; $10\,\%$ de $45 = 4{,}5$ kg ; $75\,\%$ de $80 = \dfrac{75}{100} \times 80 = 60$ m.

Exercice 4

Un article coûte 120 €. Calculer son nouveau prix après :

- une augmentation de 15 % ;
- une remise de 30 %.

Corrigé

Nouveau prix après hausse : $120 \times 1{,}15 = 138$ €.
Nouveau prix après remise : $120 \times 0{,}70 = 84$ €.

Exercice 5

Sur un plan à l'échelle 1 : 50, une pièce mesure 8 cm de long et 6 cm de large. Calculer ses dimensions réelles, en mètres.

Corrigé

Longueur réelle : $8 \times 50 = 400$ cm $= 4$ m.
Largeur réelle : $6 \times 50 = 300$ cm $= 3$ m.

Exercice 6

Calculer l'aire des figures suivantes.

- Rectangle de longueur 12 cm et largeur 5 cm.
- Triangle de base 8 cm et hauteur 6 cm.
- Disque de rayon 4 cm (valeur exacte, puis approchée au dixième).

Corrigé

Rectangle : $12 \times 5 = 60$ cm^2.
Triangle : $\dfrac{8 \times 6}{2} = 24$ cm^2.
Disque : $\pi \times 4^2 = 16\,\pi \approx 50{,}3$ cm^2.

Exercice 7

Calculer le volume des solides suivants.

- Parallélépipède rectangle de dimensions 10 cm $\times$ 6 cm $\times$ 4 cm.
- Cylindre de rayon 3 cm et hauteur 10 cm (valeur exacte puis approchée).

Corrigé

Parallélépipède : $10 \times 6 \times 4 = 240$ cm^3.
Cylindre : $\pi \times 3^2 \times 10 = 90\,\pi \approx 282{,}7$ cm^3.

Exercice 8

Un disque de rayon r a une aire de $S = 100\,\pi$ cm^2. Calculer la valeur de r.

Corrigé

$\pi\, r^2 = 100\,\pi \Rightarrow r^2 = 100 \Rightarrow r = 10$ cm.

Pour aller plus loin

Exercice 9

Le prix d'un produit augmente de 20 %, puis baisse de 20 %. Le prix de départ étant de 100 €, calculer le prix final. Que constate-t-on ?

Corrigé

Prix après hausse : $100 \times 1{,}20 = 120$ €.
Prix après baisse : $120 \times 0{,}80 = 96$ €.
Le prix final est inférieur au prix initial : une hausse puis une baisse de même pourcentage ne ramènent pas au prix de départ.

Exercice 10

Sur un plan à l'échelle 1 : 200, on mesure 35 mm entre deux points. Quelle est la distance réelle correspondante, en mètres ?

Corrigé

Distance réelle $= 35 \times 200 = 7\,000$ mm $= 7$ m.

Exercice 11

Un cylindre a une hauteur $h = 20$ cm et un volume $V = 500\,\pi$ cm^3. Calculer son rayon r.

Corrigé

$$\pi\, r^2\, h = 500\,\pi \Rightarrow r^2 = \frac{500}{h} = \frac{500}{20} = 25 \Rightarrow r = 5 \text{ cm.}$$

Exercice 12

Un terrain rectangulaire mesure 30 m de long et 20 m de large.

- Calculer son aire en mètres carrés.
- Sur un plan à l'échelle 1 : 500, quelles sont les dimensions du terrain sur le plan, en centimètres ?

Corrigé

Aire : $30 \times 20 = 600$ m^2.
Sur le plan : longueur $= \dfrac{30\,\text{m}}{500} = \dfrac{3\,000\,\text{cm}}{500} = 6$ cm ; largeur $= 4$ cm.

Activités d'application

Activité 1 • Une relation de proportionnalité (contrainte–déformation) MÉCANIQUE

Outil réinvesti : *proportionnalité, application de formule, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :*** *RDM, relation contrainte-déformation (S3.2.6)*

On donne la relation $\sigma = E \times \varepsilon$, où σ est la contrainte (en MPa), E le module du matériau (en MPa) et ε la déformation (sans unité). Dans le domaine élastique, contrainte et déformation sont proportionnelles.

1. Pour un acier de module $E = 200\,000$ MPa et une déformation $\varepsilon = 0{,}001$, calculer la contrainte σ (en MPa).
2. Pour une contrainte $\sigma = 150$ MPa dans le même acier, calculer la déformation ε. (isoler ε)

Corrigé

1. $\sigma = 200\,000 \times 0{,}001 = 200$ MPa.
2. $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} = \dfrac{150}{200\,000} = 7{,}5 \times 10^{-4}$.

Activité 2 • Aire d'une section circulaire — MÉCANIQUE

Outil réinvesti : *formule d'aire, calcul numérique* ***Lien référentiel :*** *lecture de plan, sections d'arbres*

Beaucoup de pièces (arbres, axes) ont une section circulaire. On rappelle que l'aire d'un disque de rayon r est $S = \pi r^2$.

1. Un arbre a un diamètre de 40 mm. Donner son rayon, puis calculer l'aire de sa section (en mm^2).
2. Un autre arbre a un rayon $r = 10$ mm. Calculer l'aire de sa section.

Corrigé

1. $r = \dfrac{40}{2} = 20$ mm, donc $S = \pi \times 20^2 = 400\pi \approx 1\,257$ mm^2.
2. $S = \pi \times 10^2 = 100\pi \approx 314$ mm^2.

Activité 3 • Volume et masse d'une pièce cylindrique — MÉCANIQUE

Outil réinvesti : *volume d'un cylindre, conversion mm^3 → cm^3, masse volumique* ***Lien référentiel :*** *géométrie d'une pièce, devis matière*

On rappelle que le volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h vaut $V = \pi r^2 h$. La masse d'une pièce se calcule à partir de la masse volumique du matériau : $m = \rho \times V$. Pour l'acier, on prendra $\rho = 7{,}85$ g/cm^3.
Une pièce cylindrique en acier a un rayon $r = 10$ mm et une hauteur $h = 100$ mm.

1. Calculer le volume V de la pièce, en mm^3 (on donnera la valeur approchée à l'unité).
2. Exprimer 1 mm en centimètres sous la forme d'une puissance de 10, puis en déduire à quoi est égal 1 mm^3 en cm^3.
3. En déduire le volume V de la pièce, exprimé en cm^3.
4. Calculer la masse m de la pièce, en grammes.

Corrigé

1. $V = \pi \times 10^2 \times 100 = 10\,000\,\pi \approx 31\,416$ mm^3.
2. 1 mm $= 10^{-1}$ cm, donc 1 mm$^3 = (10^{-1})^3 = 10^{-3}$ cm^3.
3. $V \approx 31\,416 \times 10^{-3} \approx 31{,}4$ cm^3.
4. $m = \rho \times V \approx 7{,}85 \times 31{,}4 \approx 247$ g.

Activité 4 • Moment quadratique d'une poutre rectangulaire — MÉCANIQUE

Outil réinvesti : *application d'une formule, puissances* ***Lien référentiel :*** *RDM, moments quadratiques (S3.2.6)*

La rigidité en flexion d'une poutre dépend du moment quadratique I de sa section. On donne la formule pour une section rectangulaire de base b et de hauteur h : $I = \dfrac{b\,h^3}{12}$ (la hauteur h étant la dimension dans le sens de la flexion).

1. Pour $b = 30$ mm et $h = 20$ mm, calculer I (en mm^4).
2. On garde la même base $b = 30$ mm mais on double la hauteur : $h = 40$ mm. Calculer le nouveau I, puis dire par combien il a été multiplié.

Corrigé

1. $I = \dfrac{30 \times 20^3}{12} = \dfrac{30 \times 8\,000}{12} = 20\,000$ mm^4.
2. $I = \dfrac{30 \times 40^3}{12} = \dfrac{30 \times 64\,000}{12} = 160\,000$ mm^4, soit 8 fois plus (la hauteur intervient au cube : $2^3 = 8$).

Activité 5 • Lecture d'un plan à l'échelle — MÉCANIQUE

***Outil réinvesti :** proportionnalité, échelle* ***Lien référentiel :** lecture de mise en plan (S2.4)*

Un dessin de définition est tracé à l'échelle **1:2** : une longueur sur le dessin représente une longueur deux fois plus grande en réalité.

1. Écrire la relation entre une longueur réelle et la longueur correspondante sur le dessin.
2. Une longueur mesurée de 75 mm sur le plan correspond à quelle longueur réelle ?
3. Une pièce mesure réellement 240 mm. Quelle est sa longueur sur le plan ?

Corrigé

1. Échelle 1:2 $\Rightarrow$ longueur réelle $= 2\times$ longueur sur le dessin.
2. Longueur réelle $= 2 \times 75 = 150$ mm.
3. Longueur sur le plan $= \dfrac{240}{2} = 120$ mm.

Activité 6 • Identifier un matériau par sa masse volumique — PHYSIQUE APPLIQUÉE

***Outil réinvesti :** proportionnalité, application de formule, comparaison* ***Lien référentiel :** S11 — Matière et matériaux (masse volumique)*

La masse volumique relie la masse m d'un échantillon à son volume V.

1. Écrire la relation entre la masse volumique ρ, la masse m et le volume V.
2. Un échantillon a une masse $m = 270$ g pour un volume $V = 100$ cm^3. Calculer sa masse volumique (en g/cm^3).
3. Sachant que l'aluminium a une masse volumique de 2,7 g/cm^3, de quel matériau s'agit-il probablement ?

Corrigé

1. $\rho = \dfrac{m}{V}$.
2. $\rho = \dfrac{270}{100} = 2{,}7$ g/cm^3.
3. Cette valeur correspond à celle de l'aluminium : l'échantillon est probablement en aluminium.

Activité 7 • Loi d'Ohm dans un circuit — PHYSIQUE APPLIQUÉE

***Outil réinvesti :** proportionnalité, application de formule, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :** S11 — Électricité (tension, intensité)*

Dans un conducteur ohmique, la tension U à ses bornes est proportionnelle à l'intensité I qui le traverse : c'est la loi d'Ohm, où R est la résistance (en ohms, Ω).

1. Écrire la loi d'Ohm reliant U, R et I.
2. Pour une résistance $R = 220\ \Omega$ traversée par un courant $I = 0{,}5$ A, calculer la tension U.
3. On applique une tension $U = 24$ V aux bornes d'une résistance $R = 12\ \Omega$. Calculer l'intensité I. (isoler I)

Corrigé

1. $U = R \times I$.
2. $U = 220 \times 0{,}5 = 110$ V.
3. $I = \dfrac{U}{R} = \dfrac{24}{12} = 2$ A.