

# Chapitre 3

## Semaine 3 : Trigonométrie

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) des exercices classiques d'application directe (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte CPI, qui réinvestissent ces notions dans des situations métier.

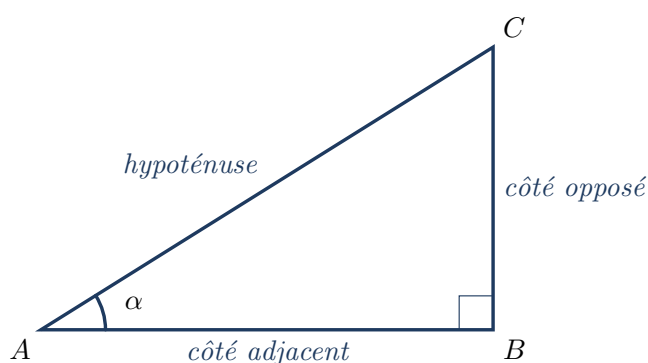
### Rappel mathématique

Cette semaine consolide les outils de la trigonométrie du triangle rectangle : théorème de Pythagore, et relations entre les côtés et les angles via sinus, cosinus et tangente. Ces outils sont mobilisés dès qu'on travaille sur une géométrie inclinée, une force décomposée, ou un signal périodique.

#### §1. Triangle rectangle : vocabulaire

Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit est appelé **hypoténuse** ; c'est toujours le côté le plus long. Les deux autres côtés forment les *côtés de l'angle droit*. Pour un angle aigu  $\alpha$  donné du triangle, on distingue :

- le **côté opposé** à  $\alpha$  : le côté qui ne touche pas  $\alpha$  ;
- le **côté adjacent** à  $\alpha$  : le côté de l'angle droit qui touche  $\alpha$ .



#### §2. Théorème de Pythagore

##### Propriété – théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés :

$$(\text{hypoténuse})^2 = (\text{côté 1})^2 + (\text{côté 2})^2.$$

*Exemple* – Pour un triangle rectangle de côtés  $a = 3$ ,  $b = 4$  : l'hypoténuse vaut  $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ .

**Réciproque utile.** Si l'on connaît l'hypoténuse  $c$  et un côté  $a$ , on isole l'autre côté :  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ .

### §3. Sinus, cosinus, tangente

#### Définition – rapports trigonométriques

Pour un angle aigu  $\alpha$  d'un triangle rectangle :

$$\sin \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$

**Moyen mnémotechnique : SOH-CAH-TOA.** *Sinus = Opposé / Hypoténuse, Cosinus = Adjacent / Hypoténuse, Tangente = Opposé / Adjacent.*

*Exemple* – Dans un triangle rectangle avec  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\sin 30^\circ = 0,5$ . Si l'hypoténuse vaut 10 cm, le côté opposé vaut  $10 \times 0,5 = 5$  cm.

### §4. Valeurs particulières

#### Propriété – angles remarquables

Angle $\alpha$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

On retient au minimum  $\sin 30^\circ = 0,5$  et  $\cos 60^\circ = 0,5$  : les autres se retrouvent à la calculatrice.

**À la calculatrice.** Avant tout calcul de sinus, cosinus ou tangente, vérifier que la calculatrice est bien en mode **degré** (voir l'Annexe : prise en main de la calculatrice, §1).

### §5. Trouver un angle à partir d'un rapport

#### Méthode – retrouver un angle (trigonométrie inverse)

Si l'on connaît la valeur d'un rapport trigonométrique et qu'on cherche l'angle correspondant, on utilise les fonctions *inverses* :

$$\alpha = \sin^{-1}(\dots) \quad \text{ou} \quad \alpha = \cos^{-1}(\dots) \quad \text{ou} \quad \alpha = \tan^{-1}(\dots).$$

On les note aussi arcsin, arccos, arctan. La calculatrice y accède par SHIFT puis la touche correspondante.

*Exemple* – Si  $\tan \alpha = 0,75$ , alors  $\alpha = \tan^{-1}(0,75) \approx 36,87^\circ$ .

**Point de vigilance.** L'unité du résultat dépend du mode actif. En mode degré,  $\tan^{-1}(1) = 45^\circ$  ; en mode radian,  $\tan^{-1}(1) \approx 0,7854$ . **Toujours vérifier le mode** (voir Annexe Calculatrice §8).

### Exercices classiques

Les huit premiers sont à traiter en priorité ; les quatre suivants, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

#### Exercice 1

Un triangle rectangle a des côtés de l'angle droit  $a = 6$  cm et  $b = 8$  cm. Calculer la longueur de l'hypoténuse.

##### Corrigé

$$c = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm.}$$

#### Exercice 2

Un triangle rectangle a une hypoténuse  $c = 13$  cm et un côté  $a = 5$  cm. Calculer la longueur du second côté.

##### Corrigé

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm.}$$

#### Exercice 3

Calculer (à la calculatrice, en mode degré) :

$$\sin 30^\circ, \quad \cos 60^\circ, \quad \tan 45^\circ, \quad \sin 90^\circ.$$

##### Corrigé

$$\sin 30^\circ = 0,5 ; \quad \cos 60^\circ = 0,5 ; \quad \tan 45^\circ = 1 ; \quad \sin 90^\circ = 1.$$

#### Exercice 4

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse mesure 10 cm et l'un des angles aigus vaut  $\alpha = 30^\circ$ . Calculer la longueur du côté opposé à  $\alpha$ .

##### Corrigé

$$\sin \alpha = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}, \text{ donc opposé} = 10 \times \sin 30^\circ = 10 \times 0,5 = 5 \text{ cm.}$$

#### Exercice 5

Dans un triangle rectangle, le côté adjacent à  $\alpha = 40^\circ$  mesure 8 cm. Calculer la longueur de l'hypoténuse (résultat arrondi au dixième).

##### Corrigé

$$\cos \alpha = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}, \text{ donc hypoténuse} = \frac{8}{\cos 40^\circ} \approx \frac{8}{0,766} \approx 10,4 \text{ cm.}$$

#### Exercice 6

Dans un triangle rectangle, le côté opposé à  $\alpha$  mesure 7 cm et le côté adjacent mesure 24 cm. Calculer l'angle  $\alpha$  (résultat arrondi au degré).

**Corrigé**

$$\tan \alpha = \frac{7}{24} \approx 0,292, \text{ donc } \alpha = \tan^{-1}(0,292) \approx 16^\circ.$$

**Exercice 7**

Un triangle rectangle a une hypoténuse de 15 cm et un côté opposé à un angle  $\alpha$  de 9 cm. Calculer l'angle  $\alpha$  (résultat arrondi au degré).

**Corrigé**

$$\sin \alpha = \frac{9}{15} = 0,6, \text{ donc } \alpha = \sin^{-1}(0,6) \approx 37^\circ.$$

**Exercice 8**

Vérifier sur sa calculatrice qu'on est bien en mode degré, en calculant  $\sin 90^\circ$ . Quel résultat doit-on obtenir ? Et si le mode est radian, que donne le calcul ?

**Corrigé**

En mode degré :  $\sin 90^\circ = 1$  (exactement).

En mode radian :  $\sin 90 \approx 0,894$  (la calculatrice interprète 90 comme 90 radians). Si l'on obtient ce résultat, c'est qu'il faut basculer en mode degré.

————— *Pour aller plus loin* —————

**Exercice 9**

Un triangle rectangle a une hypoténuse de longueur  $c$ . Démontrer, à partir des définitions, que pour tout angle aigu  $\alpha$  de ce triangle on a  $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$ .

**Corrigé**

Soit  $a$  le côté opposé à  $\alpha$ ,  $b$  le côté adjacent. Alors  $\sin \alpha = a/c$  et  $\cos \alpha = b/c$ . Donc

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1,$$

par le théorème de Pythagore.

**Exercice 10**

Une échelle est appuyée contre un mur. Elle mesure 5 m et fait un angle de  $70^\circ$  avec le sol. Calculer la hauteur atteinte sur le mur (résultat arrondi au centimètre).

**Corrigé**

La hauteur est le côté opposé à l'angle  $70^\circ$  ; l'échelle est l'hypoténuse.

$$\text{Hauteur} = 5 \times \sin 70^\circ \approx 5 \times 0,9397 \approx 4,70 \text{ m} = 470 \text{ cm}.$$

**Exercice 11**

Un triangle rectangle a pour côtés 1,  $\sqrt{3}$ , 2. Identifier l'hypoténuse, puis calculer les trois angles (aidé du tableau des valeurs particulières).

**Corrigé**

L'hypoténuse est le côté le plus long : 2. On a un angle droit ; les deux autres angles  $\alpha$  et  $\beta$  vérifient  $\alpha + \beta = 90^\circ$ .

$\sin \alpha = \frac{1}{2}$  donc  $\alpha = 30^\circ$  ; et donc  $\beta = 60^\circ$ .

**Exercice 12**

Dans un triangle rectangle, on connaît  $\sin \alpha = 0,28$ . Calculer  $\alpha$  (au degré près), puis  $\cos \alpha$  et  $\tan \alpha$  (à  $10^{-2}$  près).

**Corrigé**

$\alpha = \sin^{-1}(0,28) \approx 16^\circ$ .

$\cos \alpha \approx \cos 16^\circ \approx 0,96$  ;  $\tan \alpha \approx \tan 16^\circ \approx 0,29$ .

**Activités d'application****Activité 1 • Projeter une force sur deux axes**

MÉCANIQUE

**Outil réinvesti** : cosinus, sinus, projection **Lien référentiel** : statique, modélisation des actions mécaniques (S3.2.4)

Pour écrire l'équilibre d'une pièce, on remplace une force inclinée par ses deux composantes. On donne : la composante horizontale est  $F_x = F \cos \alpha$  et la composante verticale  $F_y = F \sin \alpha$ . Ici  $F = 200$  N et  $\alpha = 30^\circ$ .

1. Calculer la composante horizontale  $F_x$ .
2. Calculer la composante verticale  $F_y$ .
3. Vérifier que  $\sqrt{F_x^2 + F_y^2}$  redonne bien  $F$ .

**Corrigé**

1.  $F_x = 200 \times \cos 30^\circ \approx 200 \times 0,866 = 173$  N.

2.  $F_y = 200 \times \sin 30^\circ = 200 \times 0,5 = 100$  N.

3.  $\sqrt{173^2 + 100^2} = \sqrt{39\,929} \approx 200$  N. On retrouve bien  $F$ .

**Activité 2 • Longueur d'une hypoténuse (équerre)**

MÉCANIQUE

**Outil réinvesti** : théorème de Pythagore **Lien référentiel** : géométrie d'une pièce, lecture de plan

Une équerre a deux côtés perpendiculaires de longueurs 30 mm et 40 mm.

1. Énoncer la relation de Pythagore dans un triangle rectangle d'hypoténuse  $c$  et de côtés  $a$  et  $b$ .
2. Calculer la longueur de l'hypoténuse de l'équerre.

**Corrigé**

1.  $c^2 = a^2 + b^2$ .

2.  $c = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2\,500} = 50$  mm.

## Activité 3 • Angle d'une glissière

MÉCANIQUE

**Outil réinvesti** : tangente, angle    **Lien référentiel** : géométrie d'un mécanisme (S3.2.2-3)

Une glissière monte d'une hauteur de 50 mm sur une avance horizontale de 50 mm. On note  $\alpha$  son angle d'inclinaison.

1. Rappeler la définition de  $\tan \alpha$  dans un triangle rectangle (à partir des côtés opposé et adjacent).
2. Calculer  $\tan \alpha$ , puis en déduire l'angle  $\alpha$ .

## Corrigé

1.  $\tan \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$ .
2.  $\tan \alpha = \frac{50}{50} = 1$ , donc  $\alpha = 45^\circ$ .

## Activité 4 • Longueur d'une barre inclinée

MÉCANIQUE

**Outil réinvesti** : sinus, isoler une grandeur    **Lien référentiel** : conception, implantation d'une barre de support

Une barre de support inclinée à  $\alpha = 30^\circ$  par rapport à l'horizontale doit atteindre un point situé à une hauteur  $h = 150$  mm. On note  $L$  la longueur de la barre (son hypoténuse).

1. Exprimer  $\sin \alpha$  en fonction de la hauteur  $h$  et de la longueur  $L$ .
2. En déduire la longueur  $L$  de la barre. (isoler  $L$ )

## Corrigé

1.  $\sin \alpha = \frac{h}{L}$  ( $h$  est le côté opposé à l'angle,  $L$  l'hypoténuse).
2.  $L = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{150}{\sin 30^\circ} = \frac{150}{0,5} = 300$  mm.

## Activité 5 • Réfraction de la lumière

PHYSIQUE APPLIQUÉE

**Outil réinvesti** : sinus, isoler une grandeur    **Lien référentiel** : S11 — Optique (principe des fibres optiques)

Lorsqu'un rayon lumineux passe de l'air dans le verre, il est dévié selon la loi de la réfraction (Snell–Descartes), que l'on donne :  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ . Ici l'air a un indice  $n_1 = 1$ , le verre  $n_2 = 1,5$ , et le rayon arrive avec un angle d'incidence  $i_1 = 30^\circ$ .

1. À partir de la loi de la réfraction, exprimer  $\sin i_2$ . (isoler  $\sin i_2$ )
2. Calculer  $\sin i_2$ , puis en déduire l'angle de réfraction  $i_2$ .

## Corrigé

1.  $\sin i_2 = \frac{n_1 \sin i_1}{n_2}$ .
2.  $\sin i_2 = \frac{1 \times \sin 30^\circ}{1,5} = \frac{0,5}{1,5} \approx 0,333$ , donc  $i_2 \approx 19,5^\circ$ . Le rayon se rapproche de la normale en entrant dans le verre.

## Activité 6 • Valeur instantanée d'une tension sinusoïdale

PHYSIQUE APPLIQUÉE

**Outil réinvesti :** sinus    **Lien référentiel :** S11 — Électricité (grandeurs alternatives)

Une tension alternative suit le modèle  $u = U_{\max} \sin \theta$ , où  $U_{\max}$  est la tension de crête et  $\theta$  l'angle (en degrés). On donne  $U_{\max} = 325$  V.

1. Calculer la valeur de la tension  $u$  pour  $\theta = 30^\circ$ .
2. Calculer  $u$  pour  $\theta = 90^\circ$ . Que représente cette valeur ?

**Corrigé**

1.  $u = 325 \times \sin 30^\circ = 325 \times 0,5 = 162,5$  V.
2.  $u = 325 \times \sin 90^\circ = 325 \times 1 = 325$  V : c'est la valeur maximale (tension de crête).