Chapitre 1

Semaine 1 : Calcul, formules et unités

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) des exercices classiques d'application directe (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte CPRP, qui réinvestissent ces notions dans des situations métier.

Rappel mathématique

Cette première semaine consolide les gestes de calcul élémentaires : manipuler les fractions, manier les puissances et la notation scientifique, convertir des unités sans se tromper, isoler une grandeur dans une formule. Ces gestes seront réinvestis dans toutes les semaines suivantes.

§1. Calcul sur les fractions

Définition – fraction

Une fraction $\dfrac{a}{b}$ représente le partage de a par b (avec $b \neq 0$). Le nombre a est le *numérateur*, b est le *dénominateur*.

Propriété – simplifier

Si l'on multiplie (ou divise) numérateur et dénominateur par un même nombre non nul, la fraction ne change pas de valeur :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}, \quad k \neq 0.$$

Exemple – $\dfrac{12}{18} = \dfrac{12 \div 6}{18 \div 6} = \dfrac{2}{3}$.

Propriété – additionner ou soustraire

Pour ajouter (ou retrancher) deux fractions, on les met au **même dénominateur**, puis on additionne (ou retranche) les numérateurs :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,d}{b\,d} + \frac{c\,b}{d\,b} = \frac{a\,d + c\,b}{b\,d}.$$

Exemple – $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{2 \times 4}{12} + \dfrac{1 \times 3}{12} = \dfrac{8+3}{12} = \dfrac{11}{12}$.

Propriété – multiplier ou diviser

Pour multiplier deux fractions, on multiplie numérateurs entre eux et dénominateurs entre eux :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

Pour diviser par une fraction, on multiplie par son inverse :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

Exemple – $\frac{3}{5} \times \frac{10}{9} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$. $\frac{5}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{8}$.

Point de vigilance. On additionne avec un dénominateur commun, mais on multiplie *sans* le faire. Confondre les deux est l'erreur la plus fréquente.

§2. Puissances et notation scientifique

Définition – puissance d'un nombre

Pour un entier $n \geq 1$, $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$. On pose $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Propriété – règles de calcul

Pour tous nombres a, b non nuls et entiers m, n :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (a \times b)^n = a^n \times b^n.$$

Exemple – $10^3 \times 10^{-5} = 10^{3+(-5)} = 10^{-2}$; $(10^{-3})^2 = 10^{-6}$.

Définition – notation scientifique

Un nombre est en notation scientifique s'il s'écrit $a \times 10^n$, avec $1 \leq |a| < 10$ et n entier relatif.

Exemple – $3\,200 = 3{,}2 \times 10^3$; $0{,}000\,034 = 3{,}4 \times 10^{-5}$.

À la calculatrice. Voir l'*Annexe : prise en main de la calculatrice*, §4 (saisie d'une notation scientifique) et §5 (lecture d'un résultat).

§3. Conversions d'unités

Les **préfixes du Système international** permettent d'exprimer une grandeur en multipliant l'unité de base par une puissance de 10 :

Préfixe	Symbole	Facteur	Préfixe	Symbole	Facteur
giga	G	10^9	milli	m	10^{-3}
méga	M	10^6	micro	µ	10^{-6}
kilo	k	10^3	nano	n	10^{-9}

Exemple – $3{,}3\ V = 3{,}3 \times 10^3\ mV = 3\,300\ mV$; $20\ \mu s = 20 \times 10^{-6}\ s = 2 \times 10^{-5}\ s$.

Méthode – conversion d'une aire ou d'un volume

Pour convertir une aire ou un volume entre deux unités, on convertit d'abord la dimension linéaire correspondante, puis on l'élève à la puissance appropriée.
Aire : 1 mm $= 10^{-3}$ m, donc 1 mm$^2 = (10^{-3})^2$ m$^2 = 10^{-6}$ m^2.
Volume : 1 mm $= 10^{-1}$ cm, donc 1 mm$^3 = (10^{-1})^3$ cm$^3 = 10^{-3}$ cm^3.

Point de vigilance. L'erreur classique est de croire que 1 mm$^2 = 10^{-3}$ m^2 (faux : l'exposant doit aussi être au carré).

§4. Isoler une grandeur dans une formule

Dans un calcul métier, on n'utilise pas toujours une formule dans le sens où elle est écrite. Si l'on connaît certaines grandeurs et que l'on cherche celle qui reste, il faut *isoler* cette grandeur.

Méthode – isoler une grandeur

On effectue les opérations inverses, dans l'ordre inverse, sur les deux membres de l'égalité, jusqu'à ce que la grandeur cherchée soit seule.

- Pour annuler une addition, on soustrait ; pour annuler une soustraction, on additionne.
- Pour annuler une multiplication, on divise ; pour annuler une division, on multiplie.
- Pour annuler un carré (sur un nombre positif), on prend la racine carrée.

Exemple – Isoler I dans $U = R \times I$. On divise les deux membres par R : $\dfrac{U}{R} = I$, soit $I = \dfrac{U}{R}$.

Exemple – Isoler h dans $V = L \times \ell \times h$. On divise par $L \times \ell$: $h = \dfrac{V}{L \times \ell}$.

Exemple – Isoler r dans $S = \pi r^2$. On divise par π : $\dfrac{S}{\pi} = r^2$. Puis on prend la racine carrée : $r = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$.

Exercices classiques

Ces exercices courts exercent les gestes mathématiques vus dans le rappel, sans contexte métier. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. Les huit premiers sont à traiter en priorité ; les quatre suivants, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Simplifier les fractions suivantes au maximum.

$$\frac{12}{18}, \quad \frac{15}{25}, \quad \frac{42}{56}.$$

Réponse :

Exercice 2

Calculer en réduisant au même dénominateur :

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\,,\qquad \frac{5}{6}-\frac{1}{2}\,.$$

Réponse :

Exercice 3

Calculer (puis simplifier) :

$$\frac{3}{5}\times\frac{10}{9}\,,\qquad \frac{5}{4}\div\frac{2}{3}\,.$$

Réponse :

Exercice 4

Calculer sans calculatrice :

$$2^5\,,\qquad 10^{-2}\,,\qquad (-3)^2\,,\qquad 5^0\,.$$

Réponse :

Exercice 5

Écrire en notation scientifique :

$$0{,}000\,034\,,\qquad 5\,200\,000\,,\qquad 12{,}5\,.$$

Réponse :

Exercice 6

Effectuer les conversions de longueur ou de durée :

- 250 mm en m ;
- 0,04 km en m ;
- 1,5 h en s.

Réponse :

Exercice 7

Convertir 400 mm^2 en cm^2 puis en m^2, en passant explicitement par la dimension linéaire.

Réponse :

Exercice 8

Dans chacune des relations suivantes, isoler la grandeur indiquée.

- Dans $y = 3x + 2$, exprimer x en fonction de y.
- Dans $v = \dfrac{d}{t}$, exprimer d, puis t.
- Dans $P = U \times I$, exprimer I.

Réponse :

Pour aller plus loin

Exercice 9

Calculer :

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2}.$$

Réponse :

Exercice 10

Simplifier l'expression à l'aide des règles de calcul sur les puissances :

$$\frac{10^5 \times 10^{-2}}{10^4}.$$

Réponse :

Exercice 11

Convertir $2\,500$ mm^3 en cm^3, puis en litres (1 L $= 10^3$ cm^3).

Réponse :

Exercice 12

Isoler h dans la formule du volume d'un cylindre $V = \pi r^2 h$, puis isoler r dans la même formule.

Réponse :

Activités d'application

Activité 1 • Vitesse de coupe en tournage MÉCANIQUE

***Outil réinvesti :** application d'une formule, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :** S7.2.2 — paramètres de coupe*

En tournage, on relie la vitesse de coupe V_c au diamètre D de la pièce et à la fréquence de rotation n de la broche par la formule :

$$V_c = \frac{\pi \times D \times n}{1\,000},$$

avec V_c en m/min, D en mm et n en tr/min.
On tourne un arbre de diamètre $D = 80$ mm à une fréquence $n = 500$ tr/min.

1. Calculer la vitesse de coupe V_c.
2. Pour le même diamètre, à quelle fréquence n faut-il tourner pour obtenir $V_c = 150$ m/min ? (isoler n)

Réponse :

Activité 2 • Vitesse d'avance en fraisage — MÉCANIQUE

Outil réinvesti : *application d'une formule, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :*** *S7.2.2 — paramètres de coupe*

En fraisage, la vitesse d'avance V_f se calcule à partir de l'avance par dent f_z, du nombre de dents Z de la fraise et de la fréquence de rotation n :

$$V_f = f_z \times Z \times n\,,$$

avec V_f en mm/min, f_z en mm/dent et n en tr/min.
On fraise avec une fraise de $Z = 4$ dents, une avance $f_z = 0{,}1$ mm/dent et $n = 1\,500$ tr/min.

1. Calculer la vitesse d'avance V_f.
2. Pour la même fraise et la même fréquence, quelle avance f_z faut-il pour atteindre $V_f = 1\,200$ mm/min ? (isoler f_z)

Réponse :

Activité 3 • Section du copeau — MÉCANIQUE

Outil réinvesti : *application d'une formule, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :*** *S7.2.2 — paramètres de coupe (section du copeau)*

En tournage, la section du copeau enlevé à chaque tour vaut $S = a_p \times f$, où a_p est la profondeur de passe (en mm) et f l'avance par tour (en mm/tr).
On usine avec $a_p = 2$ mm et $f = 0{,}3$ mm/tr.

1. Calculer la section S du copeau (en mm^2).
2. Pour la même avance f, à quelle profondeur de passe a_p faut-il aller pour doubler la section du copeau ? (isoler a_p)

Réponse :

Activité 4 • Conversion d'une vitesse d'avance — MÉCANIQUE

Outil réinvesti : *conversion d'unités composées, puissances de 10* ***Lien référentiel :*** *S7.4 — caractéristiques des machines de production*

La vitesse d'avance d'une machine est affichée en $V_f = 1\,500$ mm/min. On veut la convertir en m/s pour la comparer à d'autres données de la documentation.

1. Exprimer 1 mm en mètres sous la forme d'une puissance de 10, puis 1 min en secondes.
2. En déduire à quoi correspond 1 mm/min en m/s.
3. Convertir $V_f = 1\,500$ mm/min en m/s.

Réponse :

Activité 5 • Puissance électrique d'un récepteur — PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *application d'une formule, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :*** *S15 — Électricité (puissance et énergie)*

La puissance électrique d'un récepteur en courant continu est $P = U \times I$, avec U la tension (en volts) et I l'intensité (en ampères).

1. Un moteur est alimenté sous $U = 24$ V avec un courant $I = 5$ A. Calculer sa puissance électrique P.
2. On veut limiter la puissance à $P = 96$ W sous la même tension. Quelle intensité ne faut-il pas dépasser ? (isoler I)

Réponse :

Activité 6 • Pression au fond d'un réservoir — PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *application d'une formule, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :*** *S15 — Statique des fluides*

Le principe fondamental de l'hydrostatique donne la différence de pression $\Delta P = \rho \times g \times h$, avec ρ la masse volumique du fluide, g l'intensité de la pesanteur et h la profondeur. Pour l'eau : $\rho = 1\,000$ kg/m^3 et $g \approx 10$ N/kg.

1. Calculer la différence de pression ΔP à une profondeur $h = 3$ m (résultat en pascals).
2. À quelle profondeur h la différence de pression atteint-elle $50\,000$ Pa ? (isoler h)

Réponse :