Chapitre 2

Semaine 2 : Proportionnalité et géométrie de base

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) des exercices classiques d'application directe (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte CPRP, qui réinvestissent ces notions dans des situations métier.

Rappel mathématique

Cette deuxième semaine consolide les outils qui interviennent dans presque tous les calculs métier : reconnaître une situation de proportionnalité et l'exploiter, manier les pourcentages dans les deux sens, lire une échelle, et appliquer correctement les formules d'aires et de volumes usuels.

§1. Proportionnalité

Définition – deux grandeurs proportionnelles

Deux grandeurs x et y sont *proportionnelles* si le rapport $\dfrac{y}{x}$ est constant. Ce rapport est appelé **coefficient de proportionnalité**, noté k : $y = k \times x$.

Exemple – Le prix à payer pour de l'essence est proportionnel au volume servi : si 20 *L coûtent* 34 *€, alors* $k = \dfrac{34}{20} = 1{,}70$ *€/L.*

Propriété – produit en croix

Si quatre nombres a, b, c, d (avec b et d non nuls) vérifient $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, alors $a \times d = b \times c$. On peut isoler n'importe laquelle des quatre grandeurs si l'on connaît les trois autres.

Exemple – Si $\dfrac{a}{3} = \dfrac{20}{12}$*, alors* $a \times 12 = 3 \times 20$*, soit* $a = \dfrac{60}{12} = 5$.

Point de vigilance. Avant d'appliquer le produit en croix, il faut s'assurer que la situation est bien proportionnelle. Par exemple, l'âge et la taille d'un enfant ne le sont pas.

§2. Pourcentages

Définition – pourcentage

Un pourcentage $p\,\%$ représente la fraction $\frac{p}{100}$. Calculer $p\,\%$ d'une quantité Q, c'est calculer $\frac{p}{100} \times Q$.

Exemple – *30 % de 250 € vaut* $\frac{30}{100} \times 250 = 75$ *€.*

Méthode – augmentation et diminution

Augmenter une quantité de $p\,\%$ revient à la multiplier par $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.
Diminuer une quantité de $p\,\%$ revient à la multiplier par $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

Exemple – *Un prix de 80 € subit une hausse de 15 % : nouveau prix* $= 80 \times 1{,}15 = 92$ *€.*
Une remise de 20 % sur 80 € : prix soldé $= 80 \times 0{,}80 = 64$ *€.*

Point de vigilance. Une hausse de 20 % suivie d'une baisse de 20 % ne ramène pas au prix initial : $100 \times 1{,}20 \times 0{,}80 = 96$, pas 100.

§3. Échelles

Définition – échelle

Sur un plan ou une carte, l'*échelle* est le rapport entre une longueur sur le plan et la longueur réelle correspondante, exprimées dans la même unité :

$$\text{échelle} = \frac{\text{longueur sur le plan}}{\text{longueur réelle}}.$$

Une échelle s'écrit souvent sous la forme $1 : n$ (un sur n). Avec une échelle $1 : 50$, 1 cm sur le plan représente 50 cm en réalité ; ou encore, 1 mm sur le plan représente 50 mm.

Exemple – *Sur un plan à l'échelle* $1 : 100$, *un mur mesure 4 cm. Sa longueur réelle est* $4 \times 100 = 400$ *cm* $= 4$ *m.*

§4. Aires usuelles

Propriété – formules d'aires

Rectangle de longueur L et largeur ℓ : $S = L \times \ell$.
Triangle de base b et hauteur h : $S = \frac{b \times h}{2}$.
Disque de rayon r : $S = \pi r^2$. Circonférence (périmètre) : $\mathcal{P} = 2\pi r$.

Exemple – *Disque de rayon* $r = 5$ *cm :* $S = \pi \times 5^2 = 25\pi \approx 78{,}5$ *cm*^{2}.

Conversions d'aires. Pour passer d'une unité d'aire à une autre, on convertit la dimension linéaire correspondante et on élève au carré (voir semaine 1, §3).

§5. Volumes usuels

Propriété – formules de volumes

Parallélépipède rectangle de longueur L, largeur ℓ, hauteur h : $V = L \times \ell \times h$.
Cylindre de rayon r et hauteur h : $V = \pi r^2 h$.
Sphère de rayon r : $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Exemple – Cylindre de rayon $r = 2$ *cm et hauteur* $h = 10$ *cm :* $V = \pi \times 2^2 \times 10 = 40\pi \approx 125{,}7$ *cm*^{3}.

Conversions de volumes. Pour passer d'une unité de volume à une autre, on convertit la dimension linéaire et on élève au cube (voir semaine 1, §3).

Exercices classiques

Les huit premiers sont à traiter en priorité ; les quatre suivants, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Quatre stylos coûtent 6 €. En supposant la proportionnalité, calculer le prix de 10 stylos, puis combien on peut en acheter avec 21 €.

Corrigé

Coefficient : $\dfrac{6}{4} = 1{,}5$ €/stylo. Prix de 10 stylos : $10 \times 1{,}5 = 15$ €. Nombre de stylos avec 21 € : $\dfrac{21}{1{,}5} = 14$.

Exercice 2

Une voiture parcourt 180 km en 2 h à vitesse constante. Calculer la distance parcourue en 3 h 30 min (avec produit en croix).

Corrigé

3 h 30 min = 3,5 h.
$\dfrac{180}{2} = \dfrac{d}{3{,}5}$, donc $d = \dfrac{180 \times 3{,}5}{2} = 315$ km.

Exercice 3

Calculer mentalement (ou en posant le calcul) :

- 25 % de 200 € ;
- 10 % de 45 kg ;
- 75 % de 80 m.

Corrigé

25 % de 200 $= \dfrac{25}{100} \times 200 = 50$ € ; 10 % de 45 = 4,5 kg ; 75 % de 80 $= \dfrac{75}{100} \times 80 = 60$ m.

Exercice 4

Un article coûte 120 €. Calculer son nouveau prix après :

- une augmentation de 15 % ;
- une remise de 30 %.

Corrigé

Nouveau prix après hausse : $120 \times 1{,}15 = 138$ €.
Nouveau prix après remise : $120 \times 0{,}70 = 84$ €.

Exercice 5

Sur un plan à l'échelle 1 : 50, une pièce mesure 8 cm de long et 6 cm de large. Calculer ses dimensions réelles, en mètres.

Corrigé

Longueur réelle : $8 \times 50 = 400$ cm $= 4$ m.
Largeur réelle : $6 \times 50 = 300$ cm $= 3$ m.

Exercice 6

Calculer l'aire des figures suivantes.

- Rectangle de longueur 12 cm et largeur 5 cm.
- Triangle de base 8 cm et hauteur 6 cm.
- Disque de rayon 4 cm (valeur exacte, puis approchée au dixième).

Corrigé

Rectangle : $12 \times 5 = 60$ cm^2.
Triangle : $\dfrac{8 \times 6}{2} = 24$ cm^2.
Disque : $\pi \times 4^2 = 16\,\pi \approx 50{,}3$ cm^2.

Exercice 7

Calculer le volume des solides suivants.

- Parallélépipède rectangle de dimensions 10 cm × 6 cm × 4 cm.
- Cylindre de rayon 3 cm et hauteur 10 cm (valeur exacte puis approchée).

Corrigé

Parallélépipède : $10 \times 6 \times 4 = 240$ cm^3.
Cylindre : $\pi \times 3^2 \times 10 = 90\,\pi \approx 282{,}7$ cm^3.

Exercice 8

Un disque de rayon r a une aire de $S = 100\,\pi$ cm^2. Calculer la valeur de r.

Corrigé

$\pi\, r^2 = 100\,\pi \Rightarrow r^2 = 100 \Rightarrow r = 10$ cm.

Pour aller plus loin

Exercice 9

Le prix d'un produit augmente de 20 %, puis baisse de 20 %. Le prix de départ étant de 100 €, calculer le prix final. Que constate-t-on ?

Corrigé

Prix après hausse : $100 \times 1{,}20 = 120$ €.
Prix après baisse : $120 \times 0{,}80 = 96$ €.
Le prix final est inférieur au prix initial : une hausse puis une baisse de même pourcentage ne ramènent pas au prix de départ.

Exercice 10

Sur un plan à l'échelle 1 : 200, on mesure 35 mm entre deux points. Quelle est la distance réelle correspondante, en mètres ?

Corrigé

Distance réelle $= 35 \times 200 = 7\,000$ mm $= 7$ m.

Exercice 11

Un cylindre a une hauteur $h = 20$ cm et un volume $V = 500\,\pi$ cm^3. Calculer son rayon r.

Corrigé

$$\pi\, r^2\, h = 500\,\pi \Rightarrow r^2 = \frac{500}{h} = \frac{500}{20} = 25 \Rightarrow r = 5 \text{ cm}.$$

Exercice 12

Un terrain rectangulaire mesure 30 m de long et 20 m de large.

- Calculer son aire en mètres carrés.
- Sur un plan à l'échelle 1 : 500, quelles sont les dimensions du terrain sur le plan, en centimètres ?

Corrigé

Aire : $30 \times 20 = 600$ m^2.
Sur le plan : longueur $= \dfrac{30\,\text{m}}{500} = \dfrac{3\,000\,\text{cm}}{500} = 6$ cm ; largeur $= 4$ cm.

Activités d'application

Activité 1 • Proportionnalité entre vitesse de coupe et fréquence MÉCANIQUE

***Outil réinvesti :** proportionnalité, tableau de valeurs* ***Lien référentiel :** S7.2.2 — paramètres de coupe*

Pour un diamètre D fixé, la relation $V_c = \dfrac{\pi \times D \times n}{1\,000}$ devient une relation de proportionnalité entre V_c et n : doubler n double V_c. On tourne un arbre de diamètre $D = 100$ mm.

1. Compléter le tableau de V_c pour $n = 0,\ 500,\ 1\,000,\ 1\,500,\ 2\,000$ tr/min (résultats arrondis au dixième).
2. Calculer le rapport V_c/n pour les valeurs non nulles. Que constate-t-on ?
3. Quelle fréquence n donne $V_c = 314{,}2$ m/min ?

Corrigé

Pour $D = 100$ mm, on a $V_c = \dfrac{\pi \times 100 \times n}{1\,000} = \dfrac{\pi}{10}\, n \approx 0{,}314\, n$.

n (tr/min)	0	500	1 000	1 500	2 000
V_c (m/min)	0	157,1	314,2	471,2	628,3

1. Voir le tableau ci-dessus.
2. $V_c/n \approx 0{,}314$ pour toutes les valeurs : le rapport est constant, V_c est proportionnelle à n.
3. $n = V_c/0{,}314 \approx 314{,}2/0{,}314 \approx 1\,000$ tr/min.

Activité 2 • Aire d'une surface à fraiser — MÉCANIQUE

Outil réinvesti : *formule d'aire, conversion mm² → cm²* ***Lien référentiel :*** *lecture de plan, géométrie d'une pièce*

On surface une plaque rectangulaire de longueur $L = 200$ mm et de largeur $l = 80$ mm.

1. Donner la formule de l'aire d'un rectangle, puis calculer l'aire S de la plaque (en mm^2).
2. Exprimer 1 mm en centimètres sous la forme d'une puissance de 10, puis en déduire à quoi est égal 1 mm^2 en cm^2.
3. En déduire S en cm^2.

Corrigé

1. $S = L \times l = 200 \times 80 = 16\,000$ mm^2.
2. 1 mm $= 10^{-1}$ cm, donc 1 mm$^2 = (10^{-1})^2 = 10^{-2}$ cm^2.
3. $S = 16\,000 \times 10^{-2} = 160$ cm^2.

Activité 3 • Volume et masse de matière enlevée — MÉCANIQUE

Outil réinvesti : *volume d'un pavé, conversion mm³ → cm³, masse volumique* ***Lien référentiel :*** *S7.2 — enlèvement de matière, devis matière*

En surfaçage, on enlève une couche d'épaisseur a_p sur une surface $L \times l$. Le volume enlevé vaut $V = L \times l \times a_p$. La masse correspondante se déduit de la masse volumique du matériau : $m = \rho \times V$. Pour l'acier, $\rho = 7{,}85$ g/cm^3.

On surface une plaque d'acier avec $L = 100$ mm, $l = 50$ mm et $a_p = 2$ mm.

1. Calculer le volume V de matière enlevée, en mm^3.
2. Exprimer 1 mm en cm sous la forme d'une puissance de 10, puis en déduire à quoi est égal 1 mm^3 en cm^3.
3. En déduire V en cm^3.
4. Calculer la masse m de matière enlevée, en grammes.

Corrigé

1. $V = 100 \times 50 \times 2 = 10\,000$ mm^3.
2. 1 mm $= 10^{-1}$ cm, donc 1 mm$^3 = (10^{-1})^3 = 10^{-3}$ cm^3.
3. $V = 10\,000 \times 10^{-3} = 10$ cm^3.
4. $m = 7{,}85 \times 10 = 78{,}5$ g.

Activité 4 • Temps d'usinage MÉCANIQUE

Outil réinvesti : *application d'une formule, isoler une grandeur, conversion min/s* ***Lien référentiel :*** *S9.1.1 — temps de production*

Le temps d'usinage est lié à la longueur à parcourir et à la vitesse d'avance par $t = \dfrac{L}{V_f}$.

Une fraise progresse à $V_f = 500$ mm/min pour usiner une longueur $L = 200$ mm.

1. Calculer le temps d'usinage t, d'abord en minutes, puis en secondes.
2. Pour la même longueur, à quelle vitesse V_f faut-il fraiser pour terminer en 0,2 min ? (isoler V_f)

Corrigé

1. $t = \dfrac{200}{500} = 0{,}4 \text{ min} = 0{,}4 \times 60 = 24 \text{ s}$.
2. $V_f = \dfrac{L}{t} = \dfrac{200}{0{,}2} = 1\,000 \text{ mm/min}$.

Activité 5 • Lecture d'un plan d'usinage à l'échelle MÉCANIQUE

Outil réinvesti : *proportionnalité, échelle* ***Lien référentiel :*** *S2.4 — lecture de plan*

Un plan d'usinage est tracé à l'échelle **1:5** : une longueur réelle est cinq fois la longueur correspondante sur le dessin.

1. Écrire la relation entre la longueur réelle et la longueur sur le dessin.
2. Une longueur mesurée de 60 mm sur le plan correspond à quelle longueur réelle ?
3. Une pièce mesure réellement 400 mm. Quelle est sa longueur sur le plan ?

Corrigé

1. Échelle 1:5 $\Rightarrow$ longueur réelle $= 5\times$ longueur sur le dessin.
2. $5 \times 60 = 300$ mm.
3. $400/5 = 80$ mm.

Activité 6 • Identifier un matériau par sa masse volumique PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *proportionnalité, application de formule, comparaison* ***Lien référentiel :*** *S15 — Matière et matériaux (masse volumique)*

La masse volumique relie la masse m d'un échantillon à son volume V.

1. Écrire la relation entre la masse volumique ρ, la masse m et le volume V.
2. Un échantillon a une masse $m = 270$ g pour un volume $V = 100$ cm^3. Calculer sa masse volumique (en g/cm^3).
3. Sachant que l'aluminium a une masse volumique de 2,7 g/cm^3, de quel matériau s'agit-il probablement ?

Corrigé

1. $\rho = \dfrac{m}{V}$.
2. $\rho = \dfrac{270}{100} = 2{,}7 \text{ g/cm}^3$.
3. Cette valeur correspond à celle de l'aluminium : l'échantillon est probablement en aluminium.

Activité 7 • Loi d'Ohm dans un circuit — PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *proportionnalité, application de formule, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :*** *S15 — Électricité (tension, intensité)*

Dans un conducteur ohmique, la tension U à ses bornes est proportionnelle à l'intensité I qui le traverse : c'est la loi d'Ohm, où R est la résistance (en ohms, Ω).

1. Écrire la loi d'Ohm reliant U, R et I.
2. Pour une résistance $R = 220\ \Omega$ traversée par un courant $I = 0{,}5$ A, calculer la tension U.
3. On applique une tension $U = 24$ V aux bornes d'une résistance $R = 12\ \Omega$. Calculer l'intensité I. (isoler I)

Corrigé

1. $U = R \times I$.
2. $U = 220 \times 0{,}5 = 110$ V.
3. $I = \dfrac{U}{R} = \dfrac{24}{12} = 2$ A.