



Lycée Jean-Baptiste de Baudre
Agen

Parcours de consolidation en mathématiques

Semaine 3 • extrait du parcours complet

Spécialité CPRP — Conception des Processus de Réalisation de Produits

Version étudiant
(énoncés et espaces de réponse)

De la rentrée aux vacances de la Toussaint

Semaine 3 : Trigonométrie

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) deux exercices classiques d'application (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte CPRP. Des exercices et des activités supplémentaires figurent dans le *cahier d'approfondissement*.

Rappel mathématique

Cette semaine consolide les outils de la trigonométrie du triangle rectangle : théorème de Pythagore, et relations entre les côtés et les angles via sinus, cosinus et tangente. Ces outils sont mobilisés dès qu'on travaille sur une géométrie inclinée, une force décomposée, ou un signal périodique. Chaque notion est suivie d'un petit exercice d'application immédiate ; les exercices classiques qui suivent le rappel reprennent l'ensemble des notions.

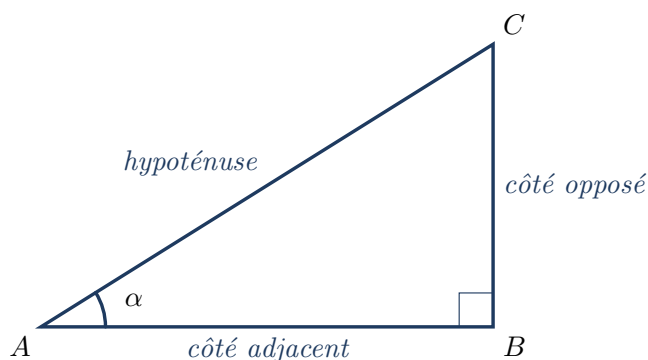
§1. Triangle rectangle : vocabulaire

Une rampe, un pan de toiture, un chanfrein, une force inclinée : dans tous ces cas, on retrouve le même triangle rectangle. Encore faut-il nommer correctement ses côtés, car c'est ce qui décide de la formule à employer.

Définition – hypoténuse, côté opposé, côté adjacent

Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit est appelé **hypoténuse** ; c'est toujours le côté le plus long. Les deux autres côtés forment les *côtés de l'angle droit*. Pour un angle aigu α donné du triangle, on distingue :

- le **côté opposé** à α : le côté qui ne touche pas α ;
- le **côté adjacent** à α : le côté de l'angle droit qui touche α .



Point de vigilance. « Opposé » et « adjacent » ne sont pas des propriétés du triangle : elles dépendent de l'angle choisi. Le côté adjacent à α est le côté opposé à l'autre angle aigu. L'hypoténuse, elle, ne change jamais.

À vous – application 1

Un triangle ABC est rectangle en A . Ses côtés sont $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

- Quel côté est l'hypoténuse ? Justifier en une phrase.
- Pour l'angle $\widehat{B}$, nommer le côté opposé et le côté adjacent.
- Reprendre la question b) pour l'angle $\widehat{C}$, et comparer avec la réponse précédente.

Réponse :

§2. Théorème de Pythagore

✓ Vérifier qu'un châssis est bien d'équerre, calculer une diagonale de découpe, retrouver un entraxe entre deux perçages : Pythagore est l'outil de contrôle géométrique le plus utilisé en atelier.

Propriété – théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés :

$$(\text{hypoténuse})^2 = (\text{côté 1})^2 + (\text{côté 2})^2.$$

À vous – application 2

Calculer la longueur de l'hypoténuse (arrondir au dixième si nécessaire).

- Côtés de l'angle droit $a = 3$ et $b = 4$.
- Côtés de l'angle droit $a = 6$ cm et $b = 8$ cm.
- Côtés de l'angle droit $a = 5$ cm et $b = 7$ cm.

Réponse :

Méthode – isoler un côté de l'angle droit

Si l'on connaît l'hypoténuse c et un côté a , on isole l'autre côté en appliquant les opérations inverses (voir semaine 1, §4) :

$$c^2 = a^2 + b^2 \implies b^2 = c^2 - a^2 \implies b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

On soustrait toujours le carré du *petit* côté à celui de l'hypoténuse : une différence négative signale une erreur d'identification.

À vous – application 3

Calculer le côté manquant.

- a) Hypoténuse $c = 13$ cm, côté $a = 5$ cm.
- b) Hypoténuse $c = 25$ mm, côté $a = 24$ mm.
- c) Hypoténuse $c = 10$ cm, côté $a = 4$ cm (arrondir au dixième).

Réponse :

Propriété – réciproque du théorème de Pythagore

Réciproquement, si dans un triangle le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres, alors ce triangle est rectangle. C'est ce qui permet de **contrôler une équerre** : un triangle de côtés 3, 4 et 5 (ou tout multiple) est rectangle.

À vous – application 4

Ces triangles sont-ils rectangles ? Justifier par un calcul.

- a) Côtés 9 cm, 12 cm, 15 cm.
- b) Côtés 6 cm, 8 cm, 11 cm.
- c) Côtés 20 mm, 21 mm, 29 mm.

Réponse :

§3. Sinus, cosinus, tangente

Pythagore relie trois longueurs, mais reste muet sur les angles. Dès qu'une inclinaison entre en jeu — pente d'une rampe, angle d'un pan de toit, direction d'une force — il faut relier les côtés aux angles.

Définition – rapports trigonométriques

Pour un angle aigu α d'un triangle rectangle :

$$\sin \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$

Moyen mnémotechnique : SOH-CAH-TOA. *Sinus = Opposé / Hypoténuse, Cosinus = Adjacent / Hypoténuse, Tangente = Opposé / Adjacent.*

À vous – application 5

Un triangle rectangle a pour côté opposé à α 3 cm, pour côté adjacent 4 cm et pour hypoténuse 5 cm.

- a) Calculer $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ et $\tan \alpha$ sous forme décimale.

- b) Dans un triangle rectangle d'hypoténuse 13 cm dont le côté opposé à β mesure 5 cm et le côté adjacent 12 cm, calculer $\sin \beta$ et $\tan \beta$.
- c) Expliquer pourquoi $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ sont toujours inférieurs à 1, alors que $\tan \alpha$ peut dépasser 1.

Réponse :

Méthode – choisir le bon rapport

On repère ce que l'on *connaît* et ce que l'on *cherche*, puis on prend le rapport qui contient ces deux côtés :

- opposé et hypoténuse $\rightarrow$ sinus ;
- adjacent et hypoténuse $\rightarrow$ cosinus ;
- opposé et adjacent $\rightarrow$ tangente.

Si l'inconnue est *au numérateur*, on multiplie ; si elle est *au dénominateur*, on divise.

À vous – application 6

Calculer la longueur demandée (arrondir au dixième).

- a) L'hypoténuse vaut 10 cm et $\alpha = 30^\circ$: calculer le côté opposé à α .
- b) Le côté adjacent à $\alpha = 40^\circ$ vaut 8 cm : calculer l'hypoténuse.
- c) Le côté adjacent à $\alpha = 25^\circ$ vaut 12 cm : calculer le côté opposé.

Réponse :

§4. Valeurs particulières

Quelques angles reviennent sans cesse sur les plans : 30° , 45° , 60° . En connaître les valeurs exactes permet de contrôler d'un coup d'œil un résultat sorti de la calculatrice.

Propriété – angles remarquables

Angle α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

On retient au minimum $\sin 30^\circ = 0,5$ et $\cos 60^\circ = 0,5$: les autres se retrouvent à la calculatrice.

À la calculatrice. Avant tout calcul de sinus, cosinus ou tangente, vérifier que la calculatrice est bien en mode **degré** (voir l'*Annexe : prise en main de la calculatrice*, §1).

À vous – application 7

Donner les valeurs suivantes, puis vérifier à la calculatrice en mode degré.

- a) $\sin 30^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\tan 45^\circ$.
- b) $\cos 30^\circ$ et $\sin 60^\circ$: valeur exacte, puis valeur approchée au millièm.
- c) Que valent $\sin 0^\circ$ et $\sin 90^\circ$?

Réponse :

Propriété – angles complémentaires

Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus α et β vérifient $\alpha + \beta = 90^\circ$: ils sont *complémentaires*. Comme le côté opposé à l'un est le côté adjacent à l'autre, il en découle

$$\sin \beta = \cos \alpha \quad \text{et} \quad \cos \beta = \sin \alpha.$$

À vous – application 8

Utiliser la relation entre angles complémentaires.

- a) Dans un triangle rectangle, un angle aigu vaut 37° . Combien vaut l'autre ?
- b) On sait que $\sin 20^\circ \approx 0,342$. En déduire $\cos 70^\circ$ sans calculatrice.
- c) Vérifier avec le tableau ci-dessus que $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$, et expliquer pourquoi.

Réponse :

§5. Trouver un angle à partir d'un rapport

Sur le terrain, on mesure des longueurs, pas des angles. Déduire l'inclinaison d'une rampe ou l'angle d'un perçage à partir de deux cotes, c'est le calcul inverse du précédent.

Méthode – retrouver un angle (trigonométrie inverse)

Si l'on connaît la valeur d'un rapport trigonométrique et qu'on cherche l'angle correspondant, on utilise les fonctions *inverses* :

$$\alpha = \sin^{-1}(\dots) \quad \text{ou} \quad \alpha = \cos^{-1}(\dots) \quad \text{ou} \quad \alpha = \tan^{-1}(\dots).$$

On les note aussi arcsin, arccos, arctan. La calculatrice y accède par **SHIFT** puis la touche correspondante.

À vous – application 9

Déterminer l'angle α (arrondir au dixième de degré).

- a) $\tan \alpha = 0,75$.
- b) $\sin \alpha = 0,6$.
- c) Le côté opposé à α mesure 7 cm et le côté adjacent 24 cm.

Réponse :

Point de vigilance. L'unité du résultat dépend du mode actif. En mode degré, $\tan^{-1}(1) = 45^\circ$; en mode radian, $\tan^{-1}(1) \approx 0,7854$. **Toujours vérifier le mode** (voir Annexe Calculatrice §8).

Méthode – résoudre entièrement un triangle rectangle

« Résoudre » un triangle rectangle, c'est en déterminer les trois côtés et les deux angles aigus.

À partir de deux données (deux côtés, ou un côté et un angle) :

1. on complète les côtés manquants par Pythagore ou par un rapport trigonométrique ;
2. on obtient un angle aigu par trigonométrie inverse ;
3. on obtient le second angle par complémentarité : $\beta = 90^\circ - \alpha$.

À vous – application 10

Un triangle rectangle a une hypoténuse de 15 cm et un côté opposé à α de 9 cm.

- a) Calculer le troisième côté.
- b) Calculer l'angle α (arrondir au degré).
- c) En déduire le second angle aigu β .

Réponse :

Exercices classiques

Deux exercices d'application pour mettre en œuvre les notions du rappel sur une situation complète. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. D'autres exercices, ainsi que les activités en contexte métier, figurent dans le *cahier d'approfondissement*.

Exercice 1

Un châssis rectangulaire doit mesurer 60 cm sur 80 cm. Pour vérifier qu'il est bien d'équerre, on mesure sa diagonale.

1. Calculer la longueur théorique de la diagonale.
2. En atelier, on mesure 99,2 cm. Le châssis est-il d'équerre ? Justifier.
3. Calculer l'écart entre la mesure et la valeur théorique, en pourcentage de cette dernière.

Réponse :

Exercice 2

Sur une plaque, deux perçages sont décalés de 45 mm horizontalement et de 28 mm verticalement.

1. Calculer l'entraxe, c'est-à-dire la distance entre les deux centres.
2. Calculer l'angle que fait la droite joignant les deux centres avec l'horizontale (arrondir au dixième de degré).
3. On souhaite conserver le même entraxe, mais avec un angle de 45° . Calculer les nouveaux décalages horizontal et vertical (arrondir au dixième de millimètre).

Réponse :

Activités d'application

Activité 1 • Diagonale d'une face rectangulaire

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : théorème de Pythagore **Lien référentiel :** S6.1 — contrôle géométrique d'une pièce

On contrôle, sur une pièce usinée, la diagonale d'une face rectangulaire de dimensions 30 mm $\times$ 40 mm.

1. Énoncer la relation de Pythagore dans un triangle rectangle d'hypoténuse c et de côtés a et b .
2. Calculer la longueur de la diagonale de la face.

Réponse :

Activité 2 • Profondeur d'une rainure en V

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : tangente, isoler une grandeur **Lien référentiel :** S7.2.2 — géométrie d'outil et de rainure

Une rainure en V usinée a un angle au sommet de 90° (donc un demi-angle de 45°) et une largeur en surface de 40 mm. La profondeur h et la demi-largeur (20 mm) forment un triangle rectangle dont l'angle vaut 45° .

1. Exprimer $\tan 45^\circ$ en fonction de la demi-largeur et de la profondeur h .
2. En déduire la profondeur h . (isoler h)

Réponse :

Activité 3 • Longueur d'un outil incliné pour atteindre une profondeur donnée

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : sinus, isoler une grandeur **Lien référentiel :** S5.3 — géométrie de l'outil et du porte-outil

Un outil de coupe progresse selon un axe incliné à $\alpha = 30^\circ$ par rapport à l'horizontale. Pour atteindre une profondeur verticale $h = 10$ mm, l'outil doit parcourir une distance L le long de son axe.

1. Exprimer $\sin \alpha$ en fonction de la profondeur h et de la longueur L .
2. En déduire L . (isoler L)

Réponse :

Activité 4 • Valeur instantanée d'une tension sinusoïdale

PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : sinus **Lien référentiel :** S15 — Électricité (grandeurs alternatives)

Une tension alternative suit le modèle $u = U_{\max} \sin \theta$, où $U_{\max}$ est la tension de crête et θ l'angle (en degrés). On donne $U_{\max} = 325$ V.

1. Calculer la valeur de la tension u pour $\theta = 30^\circ$.
2. Calculer u pour $\theta = 90^\circ$. Que représente cette valeur ?

Réponse :

Activité 5 • Longueur de perçage à programmer

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : tangente, isoler une grandeur **Lien référentiel** : S6 — programmation en commande numérique

Sur un plan, la profondeur cotée d'un trou borgne est celle de sa *partie cylindrique*, notée ℓ . Mais en commande numérique c'est la **pointe** du foret qui est pilotée : il faut donc programmer une longueur ℓ_p plus grande, augmentée de la hauteur de pointe h .

Les angles de pointe des forets vont de 116° à 120° , la plupart valant 118° . La pointe étant un cône, le demi-angle au sommet vaut 59° et

$$\tan 59^\circ = \frac{D/2}{h} \quad \text{donc} \quad h = \frac{D/2}{\tan 59^\circ}.$$

1. Un trou borgne de profondeur cylindrique $\ell = 25$ mm est percé au foret de diamètre $D = 10$ mm à 118° . Calculer la hauteur de pointe h , puis la longueur ℓ_p à programmer (arrondir au dixième).
2. Le même foret doit maintenant traverser une pièce de 18 mm d'épaisseur. Quelle profondeur minimale programmer pour que le foret débouche complètement ?

Réponse :