Chapitre 3

Semaine 3 : Trigonométrie

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) des exercices classiques d'application directe (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte CPRP, qui réinvestissent ces notions dans des situations métier.

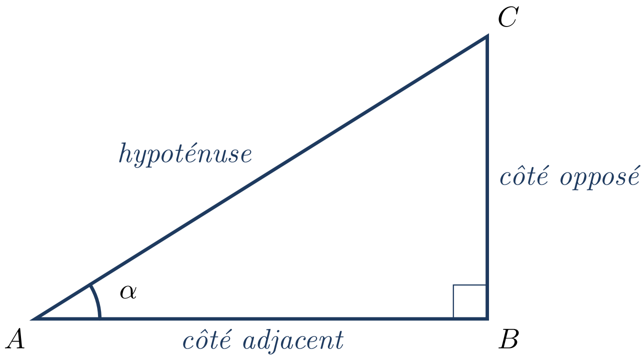
Rappel mathématique

Cette semaine consolide les outils de la trigonométrie du triangle rectangle : théorème de Pythagore, et relations entre les côtés et les angles via sinus, cosinus et tangente. Ces outils sont mobilisés dès qu'on travaille sur une géométrie inclinée, une force décomposée, ou un signal périodique.

§1. Triangle rectangle : vocabulaire

Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit est appelé **hypoténuse** ; c'est toujours le côté le plus long. Les deux autres côtés forment les *côtés de l'angle droit*. Pour un angle aigu α donné du triangle, on distingue :

- le **côté opposé** à α : le côté qui ne touche pas α ;
- le **côté adjacent** à α : le côté de l'angle droit qui touche α.



§2. Théorème de Pythagore

Propriété – théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés :

$$(\text{hypoténuse})^2 = (\text{côté } 1)^2 + (\text{côté } 2)^2 .$$

Exemple – Pour un triangle rectangle de côtés $a = 3$, $b = 4$ *: l'hypoténuse vaut* $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Réciproque utile. Si l'on connaît l'hypoténuse c et un côté a, on isole l'autre côté : $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

§3. Sinus, cosinus, tangente

Définition – rapports trigonométriques

Pour un angle aigu α d'un triangle rectangle :

$$\sin\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}, \quad \cos\alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}, \quad \tan\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$

Moyen mnémotechnique : SOH-CAH-TOA. *Sinus = Opposé / Hypoténuse, Cosinus = Adjacent / Hypoténuse, Tangente = Opposé / Adjacent.*

Exemple – Dans un triangle rectangle avec $\alpha = 30°$, $\sin 30° = 0{,}5$. *Si l'hypoténuse vaut* 10 *cm, le côté opposé vaut* $10 \times 0{,}5 = 5$ *cm.*

§4. Valeurs particulières

Propriété – angles remarquables

Angle α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

On retient au minimum $\sin 30° = 0{,}5$ et $\cos 60° = 0{,}5$: les autres se retrouvent à la calculatrice.

À la calculatrice. Avant tout calcul de sinus, cosinus ou tangente, vérifier que la calculatrice est bien en mode **degré** (voir l'*Annexe : prise en main de la calculatrice*, §1).

§5. Trouver un angle à partir d'un rapport

Méthode – retrouver un angle (trigonométrie inverse)

Si l'on connaît la valeur d'un rapport trigonométrique et qu'on cherche l'angle correspondant, on utilise les fonctions *inverses* :

$$\alpha = \sin^{-1}(\dots) \quad \text{ou} \quad \alpha = \cos^{-1}(\dots) \quad \text{ou} \quad \alpha = \tan^{-1}(\dots).$$

On les note aussi arcsin, arccos, arctan. La calculatrice y accède par `SHIFT` puis la touche correspondante.

Exemple – Si $\tan\alpha = 0{,}75$, *alors* $\alpha = \tan^{-1}(0{,}75) \approx 36{,}87°$.

Point de vigilance. L'unité du résultat dépend du mode actif. En mode degré, $\tan^{-1}(1) = 45°$; en mode radian, $\tan^{-1}(1) \approx 0{,}7854$. **Toujours vérifier le mode** (voir Annexe Calculatrice §8).

Exercices classiques

Les huit premiers sont à traiter en priorité ; les quatre suivants, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Un triangle rectangle a des côtés de l'angle droit $a = 6$ cm et $b = 8$ cm. Calculer la longueur de l'hypoténuse.

Corrigé

$c = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ cm.

Exercice 2

Un triangle rectangle a une hypoténuse $c = 13$ cm et un côté $a = 5$ cm. Calculer la longueur du second côté.

Corrigé

$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ cm.

Exercice 3

Calculer (à la calculatrice, en mode degré) :

$$\sin 30^\circ\,, \quad \cos 60^\circ\,, \quad \tan 45^\circ\,, \quad \sin 90^\circ\,.$$

Corrigé

$\sin 30^\circ = 0{,}5$; $\cos 60^\circ = 0{,}5$; $\tan 45^\circ = 1$; $\sin 90^\circ = 1$.

Exercice 4

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse mesure 10 cm et l'un des angles aigus vaut $\alpha = 30^\circ$. Calculer la longueur du côté opposé à α.

Corrigé

$\sin \alpha = \dfrac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$, donc opposé $= 10 \times \sin 30^\circ = 10 \times 0{,}5 = 5$ cm.

Exercice 5

Dans un triangle rectangle, le côté adjacent à $\alpha = 40^\circ$ mesure 8 cm. Calculer la longueur de l'hypoténuse (résultat arrondi au dixième).

Corrigé

$\cos \alpha = \dfrac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$, donc hypoténuse $= \dfrac{8}{\cos 40^\circ} \approx \dfrac{8}{0{,}766} \approx 10{,}4$ cm.

Exercice 6

Dans un triangle rectangle, le côté opposé à α mesure 7 cm et le côté adjacent mesure 24 cm. Calculer l'angle α (résultat arrondi au degré).

Corrigé

$\tan\alpha = \dfrac{7}{24} \approx 0{,}292$, donc $\alpha = \tan^{-1}(0{,}292) \approx 16°$.

Exercice 7

Un triangle rectangle a une hypoténuse de 15 cm et un côté opposé à un angle α de 9 cm. Calculer l'angle α (résultat arrondi au degré).

Corrigé

$\sin\alpha = \dfrac{9}{15} = 0{,}6$, donc $\alpha = \sin^{-1}(0{,}6) \approx 37°$.

Exercice 8

Vérifier sur sa calculatrice qu'on est bien en mode degré, en calculant $\sin 90°$. Quel résultat doit-on obtenir ? Et si le mode est radian, que donne le calcul ?

Corrigé

En mode degré : $\sin 90° = 1$ (exactement).
En mode radian : $\sin 90 \approx 0{,}894$ (la calculatrice interprète 90 comme 90 radians). Si l'on obtient ce résultat, c'est qu'il faut basculer en mode degré.

Pour aller plus loin

Exercice 9

Un triangle rectangle a une hypoténuse de longueur c. Démontrer, à partir des définitions, que pour tout angle aigu α de ce triangle on a $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$.

Corrigé

Soit a le côté opposé à α, b le côté adjacent. Alors $\sin\alpha = a/c$ et $\cos\alpha = b/c$. Donc

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1\,,$$

par le théorème de Pythagore.

Exercice 10

Une échelle est appuyée contre un mur. Elle mesure 5 m et fait un angle de 70° avec le sol. Calculer la hauteur atteinte sur le mur (résultat arrondi au centimètre).

Corrigé

La hauteur est le côté opposé à l'angle 70° ; l'échelle est l'hypoténuse.
Hauteur $= 5 \times \sin 70° \approx 5 \times 0{,}9397 \approx 4{,}70$ m $= 470$ cm.

Exercice 11

Un triangle rectangle a pour côtés 1, $\sqrt{3}$, 2. Identifier l'hypoténuse, puis calculer les trois angles (aidé du tableau des valeurs particulières).

Corrigé

L'hypoténuse est le côté le plus long : 2. On a un angle droit ; les deux autres angles α et β vérifient $\alpha + \beta = 90°$.

$\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$ donc $\alpha = 30°$; et donc $\beta = 60°$.

Exercice 12

Dans un triangle rectangle, on connaît $\sin\alpha = 0{,}28$. Calculer α (au degré près), puis $\cos\alpha$ et $\tan\alpha$ (à 10^{-2} près).

Corrigé

$\alpha = \sin^{-1}(0{,}28) \approx 16°$.
$\cos\alpha \approx \cos 16° \approx 0{,}96$; $\tan\alpha \approx \tan 16° \approx 0{,}29$.

Activités d'application

Activité 1 • Diagonale d'une face rectangulaire MÉCANIQUE

Outil réinvesti : *théorème de Pythagore* ***Lien référentiel :*** *S6.1 — contrôle géométrique d'une pièce*

On contrôle, sur une pièce usinée, la diagonale d'une face rectangulaire de dimensions 30 mm × 40 mm.

1. Énoncer la relation de Pythagore dans un triangle rectangle d'hypoténuse c et de côtés a et b.
2. Calculer la longueur de la diagonale de la face.

Corrigé

1. $c^2 = a^2 + b^2$.
2. Diagonale $= \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{900 + 1\,600} = \sqrt{2\,500} = 50$ mm.

Activité 2 • Demi-angle au sommet d'un cône d'usinage MÉCANIQUE

Outil réinvesti : *tangente, angle, isoler* ***Lien référentiel :*** *S2.4 — géométrie d'usinage, lecture de plan*

Un cône à tourner relie un grand diamètre $D_1 = 80$ mm à un petit diamètre $D_2 = 60$ mm, sur une longueur $L = 10$ mm. Le demi-angle au sommet α est l'angle du triangle rectangle dont le côté opposé est la **demi-différence de rayon** et le côté adjacent est L.

1. Calculer la demi-différence de rayon $\Delta r = (D_1 - D_2)/2$.
2. Rappeler la définition de $\tan\alpha$ dans un triangle rectangle.
3. Calculer $\tan\alpha$, puis en déduire l'angle α.

Corrigé

1. $\Delta r = \dfrac{80 - 60}{2} = 10$ mm.
2. $\tan \alpha = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$.
3. $\tan \alpha = \dfrac{\Delta r}{L} = \dfrac{10}{10} = 1$, donc $\alpha = 45°$.

Activité 3 • Profondeur d'une rainure en V

MÉCANIQUE

***Outil réinvesti :** tangente, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :** S7.2.2 — géométrie d'outil et de rainure*

Une rainure en V usinée a un angle au sommet de 90° (donc un demi-angle de 45°) et une largeur en surface de 40 mm. La profondeur h et la demi-largeur (20 mm) forment un triangle rectangle dont l'angle vaut 45°.

1. Exprimer $\tan 45°$ en fonction de la demi-largeur et de la profondeur h.
2. En déduire la profondeur h. (isoler h)

Corrigé

1. $\tan 45° = \dfrac{\text{demi-largeur}}{h} = \dfrac{20}{h}$.
2. Or $\tan 45° = 1$, donc $\dfrac{20}{h} = 1$, ce qui donne $h = 20$ mm.

Activité 4 • Longueur d'un outil incliné pour atteindre une profondeur donnée

MÉCANIQUE

***Outil réinvesti :** sinus, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :** S5.3 — géométrie de l'outil et du porte-outil*

Un outil de coupe progresse selon un axe incliné à $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale. Pour atteindre une profondeur verticale $h = 10$ mm, l'outil doit parcourir une distance L *le long de son axe.*

1. Exprimer $\sin \alpha$ en fonction de la profondeur h et de la longueur L.
2. En déduire L. (isoler L)

Corrigé

1. $\sin \alpha = \dfrac{h}{L}$ (h est le côté opposé à l'angle, L l'hypoténuse).
2. $L = \dfrac{h}{\sin \alpha} = \dfrac{10}{\sin 30°} = \dfrac{10}{0{,}5} = 20$ mm.

Activité 5 • Réfraction de la lumière

PHYSIQUE APPLIQUÉE

***Outil réinvesti :** sinus, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :** S15 — Optique (principe des fibres optiques)*

Lorsqu'un rayon lumineux passe de l'air dans le verre, il est dévié selon la loi de la réfraction (Snell–Descartes), que l'on donne : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$. Ici l'air a un indice $n_1 = 1$, le verre $n_2 = 1{,}5$, et le rayon arrive avec un angle d'incidence $i_1 = 30°$.

1. À partir de la loi de la réfraction, exprimer $\sin i_2$. (isoler $\sin i_2$)

2. Calculer $\sin i_2$, puis en déduire l'angle de réfraction i_2.

Corrigé

1. $\sin i_2 = \dfrac{n_1 \sin i_1}{n_2}$.
2. $\sin i_2 = \dfrac{1 \times \sin 30°}{1{,}5} = \dfrac{0{,}5}{1{,}5} \approx 0{,}333$, donc $i_2 \approx 19{,}5°$. Le rayon se rapproche de la normale en entrant dans le verre.

Activité 6 • Valeur instantanée d'une tension sinusoïdale — PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *sinus* ***Lien référentiel :*** *S15 — Électricité (grandeurs alternatives)*

Une tension alternative suit le modèle $u = U_{\max} \sin\theta$, où $U_{\max}$ est la tension de crête et θ l'angle (en degrés). On donne $U_{\max} = 325$ V.

1. Calculer la valeur de la tension u pour $\theta = 30°$.
2. Calculer u pour $\theta = 90°$. Que représente cette valeur ?

Corrigé

1. $u = 325 \times \sin 30° = 325 \times 0{,}5 = 162{,}5$ V.
2. $u = 325 \times \sin 90° = 325 \times 1 = 325$ V : c'est la valeur maximale (tension de crête).