



Lycée Jean-Baptiste de Baudre
Agen

Parcours de consolidation en mathématiques

Semaine 4 • extrait du parcours complet

Spécialité CPRP — Conception des Processus de Réalisation de Produits

Version étudiant
(énoncés et espaces de réponse)

De la rentrée aux vacances de la Toussaint

Semaine 4 : Vecteurs

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) deux exercices classiques d'application (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte CPRP. Des exercices et des activités supplémentaires figurent dans le *cahier d'approfondissement*.

Rappel mathématique

Cette semaine consolide les outils sur les vecteurs : représentation graphique, composantes, addition, et calcul de la norme. Ces outils sont mobilisés dès qu'on travaille sur des forces, des vitesses, des courants ou des grandeurs alternatives représentés vectoriellement. Chaque notion est suivie d'un petit exercice d'application immédiate ; les exercices classiques qui suivent le rappel reprennent l'ensemble des notions.

§1. Vecteur, composantes

| Dire qu'un câble tire à 400 N ne suffit pas : il faut savoir dans quelle direction et dans quel sens. Une force, une vitesse, un déplacement ne se résument pas à un nombre, et c'est précisément ce que le vecteur permet de décrire.

Définition – vecteur

Un vecteur, noté $\vec{u}$ ou $\overrightarrow{AB}$, est caractérisé par trois éléments : une **direction** (la droite qui le porte), un **sens** (de A vers B), et une **norme** (sa longueur), notée $\|\vec{u}\|$ ou $\|\overrightarrow{AB}\|$.

À vous – application 1

Répondre en s'appuyant sur les trois caractéristiques ci-dessus.

- Deux forces de même intensité tirent l'une vers la droite, l'autre vers la gauche. Qu'ont-elles en commun, et qu'est-ce qui les distingue ?
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont-ils la même norme ? La même direction ? Le même sens ?
- Une grandeur physique est décrite par le seul nombre 75 kg. Est-ce un vecteur ? Justifier.

Réponse :

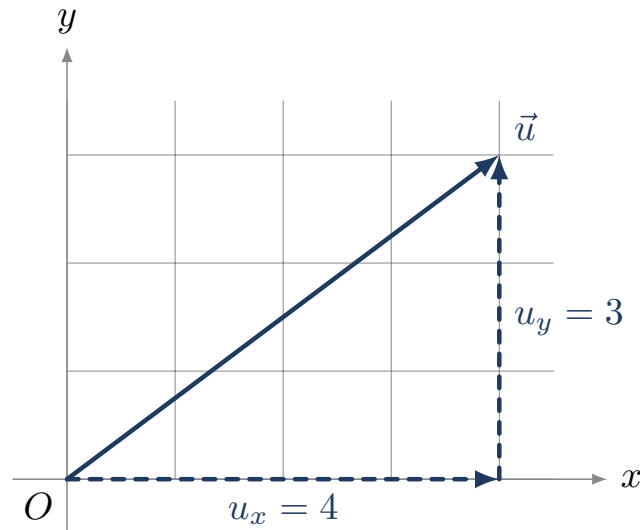
Définition – composantes d'un vecteur

Dans un repère orthonormé du plan, un vecteur $\vec{u}$ est décrit par ses *composantes* $(x; y)$, où x est son déplacement horizontal et y son déplacement vertical. Pour deux points $A(x_A; y_A)$

et $B(x_B; y_B)$:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) .$$

On calcule toujours *l'arrivée moins le départ*.



À vous – application 2

Calculer les composantes des vecteurs demandés.

- $A(1; 2)$ et $B(4; 6)$: calculer $\overrightarrow{AB}$.
- Pour les mêmes points, calculer $\overrightarrow{BA}$ et comparer avec le résultat précédent.
- $C(-2; 5)$ et $D(3; 1)$: calculer $\overrightarrow{CD}$.

Réponse :

§2. Norme d'un vecteur

Une fois la force décomposée en horizontal et vertical, il faut souvent revenir à son intensité réelle : c'est la norme. Le calcul n'est rien d'autre que le théorème de Pythagore de la semaine 3.

Propriété – norme

La norme d'un vecteur de composantes $(x; y)$ vaut

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} .$$

C'est la longueur du vecteur, calculée par le théorème de Pythagore. Une norme est toujours positive, même si les composantes sont négatives : elles sont élevées au carré.

À vous – application 3

Calculer les normes demandées.

- a) $\vec{u} = (3; 4)$.
- b) $\vec{v} = (5; 12)$.
- c) $\vec{w} = (-6; 8)$.

Réponse :

Méthode – distance entre deux points

La distance entre deux points A et B est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$: on calcule d'abord les composantes, puis la norme.

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

À vous – application 4

Calculer la distance entre les deux points (arrondir au centième si nécessaire).

- a) $A(2; 3)$ et $B(8; 11)$.
- b) $C(0; 0)$ et $D(-5; 12)$.
- c) $E(1; 4)$ et $F(4; 6)$.

Réponse :

§3. Somme de vecteurs

Quand plusieurs forces s'appliquent au même point, elles ne s'additionnent pas comme des nombres : c'est leur somme vectorielle qui donne la résultante, et c'est elle qui décide du mouvement.

Propriété – somme par composantes

Pour additionner deux vecteurs, on additionne les composantes de même nature :

$$\vec{u}_1 = (x_1; y_1), \quad \vec{u}_2 = (x_2; y_2), \quad \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (x_1 + x_2; y_1 + y_2).$$

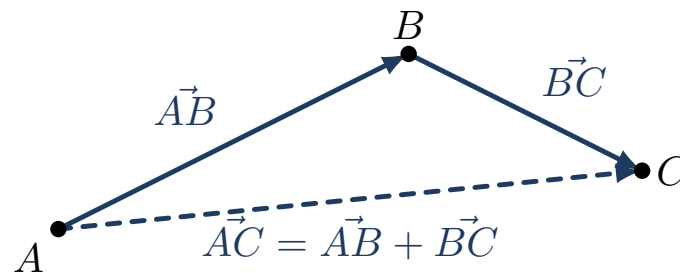
À vous – application 5

Calculer la somme, puis sa norme.

- a) $\vec{u}_1 = (3; 0)$ et $\vec{u}_2 = (0; 4)$.
- b) $\vec{u} = (2; 5)$ et $\vec{v} = (3; -1)$.
- c) $\vec{u} = (-4; 7)$ et $\vec{v} = (4; -2)$.

Réponse :

Représentation graphique. On place les vecteurs bout à bout (origine du second sur l'extrémité du premier) ; la somme va de l'origine du premier à l'extrémité du second. C'est la *relation de Chasles* : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.



À vous – application 6

On donne $A(1; 1)$, $B(4; 5)$ et $C(9; 5)$.

- Calculer les composantes de $\vec{AB}$ et de $\vec{BC}$.
- Calculer les composantes de $\vec{AC}$.
- Vérifier la relation de Chasles $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

Réponse :

Propriété – vecteur opposé et différence

L'*opposé* du vecteur $\vec{u} = (x; y)$ est le vecteur $-\vec{u} = (-x; -y)$: même direction, même norme, sens contraire. La différence s'obtient en ajoutant l'opposé :

$$\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = (x_1 - x_2; y_1 - y_2) .$$

À vous – application 7

On donne $\vec{u}_1 = (2; 3)$ et $\vec{u}_2 = (5; -1)$.

- Calculer les composantes de $-\vec{u}_2$.
- Calculer $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$, puis sa norme.
- Calculer $\vec{u}_2 - \vec{u}_1$ et sa norme, puis comparer avec la question b).

Réponse :

§4. Direction d'un vecteur

Un plan indique rarement des composantes : il donne une intensité et un angle. Savoir passer des composantes à l'angle, et de l'angle aux composantes, est le va-et-vient permanent du calcul de forces.

Méthode – angle d'un vecteur avec l'axe horizontal

Pour un vecteur $\vec{u} = (x; y)$ avec $x > 0$, l'angle θ qu'il fait avec l'axe horizontal se calcule par

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, \quad \text{donc} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right).$$

À la calculatrice. L'angle est obtenu en mode degré avec la fonction $\tan^{-1}$ (voir Annexe Calculatrice §8).

À vous – application 8

Calculer l'angle θ avec l'axe horizontal (arrondir au dixième de degré).

- $\vec{u} = (3; 4)$.
- $\vec{v} = (6; 8)$. Comparer avec la question a) et expliquer.
- $\vec{w} = (5; 12)$.

Réponse :

Méthode – des données polaires aux composantes

Réciproquement, si l'on connaît la norme $\|\vec{u}\|$ et l'angle θ avec l'horizontale, on retrouve les composantes par la trigonométrie du triangle rectangle (semaine 3, §3) :

$$x = \|\vec{u}\| \times \cos \theta \quad \text{et} \quad y = \|\vec{u}\| \times \sin \theta.$$

C'est ce calcul que l'on appelle **décomposer** un vecteur.

À vous – application 9

Calculer les composantes (arrondir au centième).

- $\|\vec{u}\| = 10$ et $\theta = 30^\circ$.
- $\|\vec{v}\| = 200$ et $\theta = 60^\circ$.
- $\|\vec{w}\| = 50$ et $\theta = 0^\circ$. Commenter le résultat.

Réponse :

§5. Vecteurs colinéaires

Deux câbles qui tirent dans le même axe, un poids et une réaction verticale : quand tout se passe sur une seule direction, le calcul vectoriel se réduit à une addition de nombres signés.

Propriété – résultante de vecteurs colinéaires

Deux vecteurs sont *colinéaires* lorsqu'ils ont la même direction. Leur résultante se calcule alors sur cette seule direction :

- de **même sens** : les normes s'ajoutent, le sens est conservé ;
- de **sens opposés** : les normes se retranchent, et le sens est celui du plus grand.

En pratique, on oriente un axe, on affecte un signe + ou – à chaque vecteur selon son sens, puis on additionne.

À vous – application 10

Déterminer la valeur et le sens de la résultante.

- Une force de 50 N vers le bas et une force de 30 N vers le haut.
- Deux forces de 120 N et 80 N, toutes deux vers la droite.
- Une force de 45 N vers la gauche et une force de 45 N vers la droite.

Réponse :

Exercices classiques

Deux exercices d'application pour mettre en œuvre les notions du rappel sur une situation complète. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. D'autres exercices, ainsi que les activités en contexte métier, figurent dans le *cahier d'approfondissement*.

Exercice 1

Un chariot automatisé se déplace dans un atelier repéré en mètres. Il part de $A(1; 1)$, passe par $B(4; 5)$, puis s'arrête en $C(9; 5)$.

- Calculer les composantes de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{BC}$, puis la longueur de chacun des deux tronçons.
- Calculer les composantes de $\overrightarrow{AC}$ et vérifier la relation de Chasles.
- Calculer la distance directe entre le départ et l'arrivée (arrondir au centième).

Réponse :

Exercice 2

Un objet est soumis à deux forces perpendiculaires : $\vec{F}_1$, horizontale, d'intensité 12 N, et $\vec{F}_2$, verticale, d'intensité 5 N.

1. Écrire les composantes de $\vec{F}_1$, de $\vec{F}_2$, puis de la résultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.
2. Calculer l'intensité de la résultante.
3. Calculer l'angle que fait $\vec{R}$ avec l'horizontale (arrondir au dixième de degré).

Réponse :

Activités d'application

Activité 1 • Résultante des composantes d'un effort de coupe

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : somme de vecteurs, norme **Lien référentiel :** S7.2.2 — efforts de coupe

Au cours d'une opération de tournage, l'effort exercé sur la pointe de l'outil se décompose, dans le plan de la coupe, en une composante tangentielle F_c (effort principal) et une composante d'avance F_f . On les donne par leurs composantes : $\vec{F}_c = (300; 0)$ N et $\vec{F}_f = (0; 400)$ N.

1. Donner les composantes de la résultante $\vec{R} = \vec{F}_c + \vec{F}_f$.
2. Calculer la norme de $\vec{R}$.

Réponse :

Activité 2 • Moment de serrage d'un mandrin

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : produit, isoler une grandeur **Lien référentiel :** S5.3 — porte-outils et mandrins, S3.4 — moment d'une force

Le moment d'une force par rapport à un axe est $M = F \times d$, où d est le bras de levier. On serre un mandrin en exerçant une force $F = 150$ N sur une clé, à une distance $d = 0,2$ m de l'axe du mandrin.

1. Calculer le moment de serrage M (en N·m).
2. On veut un moment $M = 45$ N·m avec la même force. Quel bras de levier d faut-il ? (isoler d)

Réponse :

Activité 3 • Vecteur défini par deux points (programmation d'une trajectoire)

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : composantes, norme **Lien référentiel :** S2.4 — lecture de plan, S8.3 — CFAO

Sur un plan d'usinage, deux points sont repérés par leurs coordonnées (en mm) : un point de référence $A(10; 20)$ et un point à percer $B(40; 60)$.

1. Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (rappel : $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$).
2. Calculer la norme de $\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire la distance entre les deux points.

Réponse :

Activité 4 • Vecteur vitesse d'avance d'un outil deux axes

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : norme, direction **Lien référentiel :** S11.1 — cinématiques de machines, machines multiaxes

Sur une machine à commande numérique, un outil avance simultanément suivant deux axes. Sa vitesse a pour composantes $v_x = 600$ mm/min et $v_y = 800$ mm/min.

1. Calculer la norme du vecteur vitesse d'avance (la vitesse résultante de l'outil).
2. Déterminer l'angle θ que fait le vecteur avec l'axe X ($\tan \theta = v_y/v_x$).

Réponse :

Activité 5 • Poussée d'Archimède : forces verticales opposées PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : somme de vecteurs colinéaires, signe **Lien référentiel :** S15 — statique des fluides

Un objet plongé dans l'eau subit deux forces verticales opposées : son poids $P = 50 \text{ N}$ (vers le bas) et la poussée d'Archimède $F_A = 30 \text{ N}$ (vers le haut). La force résultante est leur somme vectorielle ; comme elles sont opposées, on soustrait leurs valeurs.

1. Calculer la valeur de la force résultante et préciser son sens.
2. En déduire si l'objet coule ou remonte.

Réponse :

Activité 6 • Décalage d'origine en commande numérique
MÉCANIQUE

Outil réinvesti : composantes signées, somme de vecteurs **Lien référentiel :** S6 — programmation en commande numérique

Une machine à commande numérique possède une origine machine O_M et son repère $(O_M; X; Y; Z)$, situé en haut, à droite, au fond de l'espace de travail. Le programme, lui, est écrit dans un repère pièce $(O_P; X; Y; Z)$ posé sur la pièce.

Pour que la machine sache où se trouve la pièce, on lui introduit les coordonnées de O_P dans le repère machine : c'est le **décalage d'origine**, autrement dit le vecteur $\overrightarrow{O_M O_P}$, avec un signe sur chacun des trois axes.

1. Depuis O_M , le point O_P se trouve à 320 mm vers la gauche selon X , à 210 mm vers l'avant selon Y , et 145 mm plus bas selon Z . Écrire les composantes de $\overrightarrow{O_M O_P}$, en millimètres, en tenant compte des signes.
2. Pour une seconde pièce, le montage est décalé de 80 mm supplémentaires vers la gauche, les deux autres axes restant inchangés. Donner les composantes du nouveau décalage d'origine.

Réponse :