Chapitre 4

Semaine 4 : Vecteurs

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) des exercices classiques d'application directe (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte CPRP, qui réinvestissent ces notions dans des situations métier.

Rappel mathématique

Cette semaine consolide les outils sur les vecteurs : représentation graphique, composantes, addition, et calcul de la norme. Ces outils sont mobilisés dès qu'on travaille sur des forces, des vitesses, des courants ou des grandeurs alternatives représentés vectoriellement.

§1. Vecteur, composantes

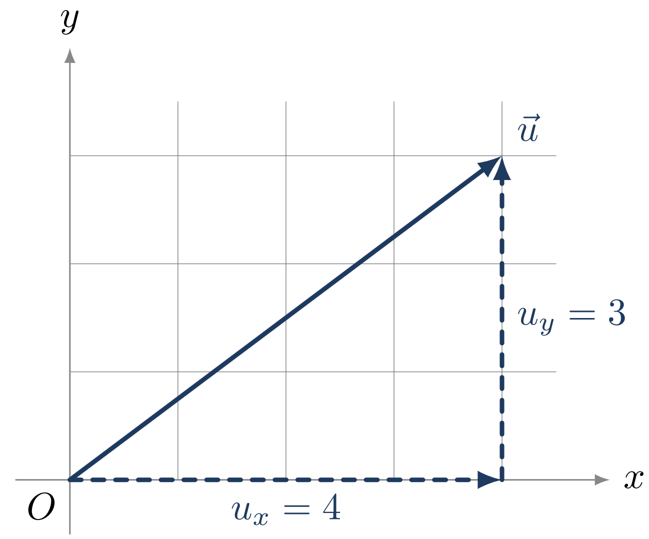
Définition – vecteur

Un vecteur, noté $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{AB}$, est caractérisé par trois éléments : une **direction** (la droite qui le porte), un **sens** (de A vers B), et une **norme** (sa longueur), notée $\|\overrightarrow{u}\|$ ou $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Définition – composantes d'un vecteur

Dans un repère orthonormé du plan, un vecteur $\overrightarrow{u}$ est décrit par ses *composantes* $(x\,;\,y)$, où x est son déplacement horizontal et y son déplacement vertical.

Exemple – Si $A(1\,;\,2)$ *et* $B(4\,;\,6)$*, alors* $\overrightarrow{AB} = (4-1\,;\,6-2) = (3\,;\,4)$.



§2. Norme d'un vecteur

Propriété – norme

La norme d'un vecteur de composantes $(x\,;\,y)$ vaut

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

C'est la longueur du vecteur, calculée par le théorème de Pythagore.

Exemple – Pour $\vec{u} = (3\,;\,4)$ *:* $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

§3. Somme de vecteurs

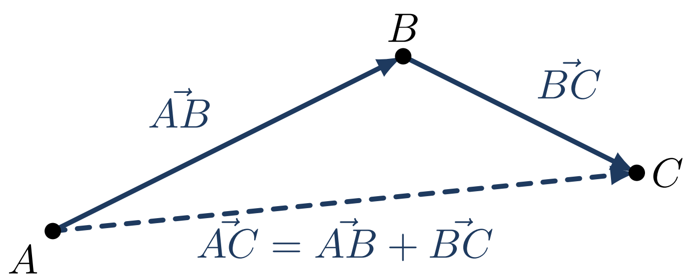
Propriété – somme par composantes

Pour additionner deux vecteurs, on additionne les composantes de même nature :

$$\vec{u_1} = (x_1\,;\,y_1)\,,\quad \vec{u_2} = (x_2\,;\,y_2)\,,\quad \vec{u_1} + \vec{u_2} = (x_1 + x_2\,;\,y_1 + y_2)\,.$$

Exemple – Si $\vec{u_1} = (3\,;\,0)$ *et* $\vec{u_2} = (0\,;\,4)$*, alors* $\vec{u_1} + \vec{u_2} = (3\,;\,4)$*, de norme* 5.

Représentation graphique. On place les vecteurs bout à bout (origine du second sur l'extrémité du premier) ; la somme va de l'origine du premier à l'extrémité du second. C'est la *relation de Chasles* : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



§4. Direction d'un vecteur

Méthode – angle d'un vecteur avec l'axe horizontal

Pour un vecteur $\overrightarrow{u} = (x\,;\,y)$ avec $x > 0$, l'angle θ qu'il fait avec l'axe horizontal se calcule par

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \quad \text{donc} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Exemple – Pour $\overrightarrow{u} = (3\,;\,4)$: $\tan\theta = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}33$, *donc* $\theta \approx 53°$.

À la calculatrice. L'angle est obtenu en mode degré avec la fonction $\tan^{-1}$ (voir Annexe Calculatrice §8).

§5. Vecteurs colinéaires opposés

Quand deux vecteurs ont la même direction mais des sens opposés, leur somme algébrique sur cette direction est leur différence en valeur absolue, et le sens est celui du plus grand.

Exemple – Une force de 50 *N vers le bas et une autre de* 30 *N vers le haut ont pour résultante* $50 - 30 = 20$ *N vers le bas.*

Exercices classiques

Les huit premiers sont à traiter en priorité ; les quatre suivants, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Soit $A(2\,;\,3)$ et $B(8\,;\,11)$. Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Corrigé

$\overrightarrow{AB} = (8 - 2\,;\,11 - 3) = (6\,;\,8)$.

Exercice 2

Calculer la norme des vecteurs suivants.

- $\overrightarrow{u_1} = (3\,;\,4)$
- $\overrightarrow{u_2} = (5\,;\,12)$
- $\overrightarrow{u_3} = (-6\,;\,8)$

Corrigé

$\|\overrightarrow{u_1}\| = \sqrt{9+16} = 5$; $\|\overrightarrow{u_2}\| = \sqrt{25+144} = 13$; $\|\overrightarrow{u_3}\| = \sqrt{36+64} = 10$.

Exercice 3

Calculer la somme $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ pour les vecteurs suivants.

- $\overrightarrow{u} = (2\,;\,5)$, $\overrightarrow{v} = (3\,;\,-1)$;
- $\overrightarrow{u} = (-4\,;\,7)$, $\overrightarrow{v} = (4\,;\,-2)$.

Corrigé

$\vec{u} + \vec{v} = (2+3\,;\,5-1) = (5\,;\,4)$.
$\vec{u} + \vec{v} = (-4+4\,;\,7-2) = (0\,;\,5)$.

Exercice 4

On donne $\vec{u_1} = (3\,;\,0)$ et $\vec{u_2} = (0\,;\,4)$. Calculer les composantes de la somme $\vec{S} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$, puis sa norme.

Corrigé

$\vec{S} = (3\,;\,4)$; $\|\vec{S}\| = \sqrt{9+16} = 5$.

Exercice 5

Soit le vecteur $\vec{u} = (6\,;\,8)$. Calculer l'angle θ qu'il fait avec l'axe horizontal (résultat arrondi au degré).

Corrigé

$\tan\theta = \dfrac{8}{6} \approx 1{,}33$, donc $\theta = \tan^{-1}(1{,}33) \approx 53°$.

Exercice 6

Soit le vecteur $\vec{u} = (5\,;\,12)$. Calculer sa norme et l'angle qu'il fait avec l'axe horizontal.

Corrigé

$\|\vec{u}\| = \sqrt{25+144} = 13$.
$\tan\theta = \dfrac{12}{5} = 2{,}4$, donc $\theta \approx 67{,}4°$.

Exercice 7

Deux forces colinéaires de sens opposés s'appliquent sur un objet : $F_1 = 80$ N vers la droite et $F_2 = 50$ N vers la gauche. Calculer la valeur et le sens de la force résultante.

Corrigé

Résultante $= 80 - 50 = 30$ N, dirigée vers la droite (sens de la plus grande des deux forces).

Exercice 8

Sur un schéma, $A(1\,;\,1)$, $B(4\,;\,5)$, $C(9\,;\,5)$. Calculer les composantes de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$. Vérifier la relation $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Corrigé

$\overrightarrow{AB} = (3\,;\,4)$; $\overrightarrow{BC} = (5\,;\,0)$; $\overrightarrow{AC} = (8\,;\,4)$.
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (3+5\,;\,4+0) = (8\,;\,4) = \overrightarrow{AC}$. La relation est vérifiée.

Pour aller plus loin

Exercice 9

Un objet est soumis à deux forces perpendiculaires : $F_1 = 12$ N horizontalement et $F_2 = 5$ N verticalement. Calculer la valeur et la direction (angle avec l'horizontale) de la force résultante.

Corrigé

$\|\overrightarrow{F}\| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ N.
$\tan\theta = \dfrac{5}{12} \approx 0{,}417$, donc $\theta \approx 22{,}6°$.

Exercice 10

Soient $\overrightarrow{u} = (4\,;\,3)$ et $\overrightarrow{v} = (-1\,;\,2)$. Calculer la norme de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

Corrigé

$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (3\,;\,5)$, donc $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34} \approx 5{,}83$.

Exercice 11

Un vecteur $\overrightarrow{u}$ a une norme $\|\overrightarrow{u}\| = 10$ et fait un angle $\theta = 30°$ avec l'axe horizontal. Calculer ses composantes x et y (rappel : $x = \|\overrightarrow{u}\|\cos\theta$, $y = \|\overrightarrow{u}\|\sin\theta$).

Corrigé

$x = 10 \times \cos 30° \approx 10 \times 0{,}866 \approx 8{,}66$.
$y = 10 \times \sin 30° = 10 \times 0{,}5 = 5$.
Donc $\overrightarrow{u} \approx (8{,}66\,;\,5)$.

Exercice 12

Deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ont pour composantes $(2\,;\,3)$ et $(5\,;\,-1)$ respectivement. Calculer les composantes de $\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}$ (rappel : $-\overrightarrow{u_2}$ a pour composantes $(-x_2\,;\,-y_2)$).

Corrigé

$\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} = (2-5\,;\,3-(-1)) = (-3\,;\,4)$.
Norme : $\sqrt{9+16} = 5$.

Activités d'application

Activité 1 • Résultante des composantes d'un effort de coupe MÉCANIQUE

***Outil réinvesti :** somme de vecteurs, norme* ***Lien référentiel :** S7.2.2 — efforts de coupe*

Au cours d'une opération de tournage, l'effort exercé sur la pointe de l'outil se décompose, dans le plan de la coupe, en une composante tangentielle F_c (effort principal) et une composante d'avance F_f. On les donne par leurs composantes : $\overrightarrow{F_c} = (300\,;\,0)$ N et $\overrightarrow{F_f} = (0\,;\,400)$ N.

1. Donner les composantes de la résultante $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F_c} + \overrightarrow{F_f}$.
2. Calculer la norme de $\overrightarrow{R}$.

Corrigé

1. $\overrightarrow{R} = (300 + 0\,;\, 0 + 400) = (300\,;\, 400)$ N.
2. $\|\overrightarrow{R}\| = \sqrt{300^2 + 400^2} = \sqrt{250\,000} = 500$ N.

Activité 2 • Moment de serrage d'un mandrin — MÉCANIQUE

Outil réinvesti : *produit, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :*** *S5.3 — porte-outils et mandrins, S3.4 — moment d'une force*

Le moment d'une force par rapport à un axe est $M = F \times d$, où d est le bras de levier. On serre un mandrin en exerçant une force $F = 150$ N sur une clé, à une distance $d = 0{,}2$ m de l'axe du mandrin.

1. Calculer le moment de serrage M (en N·m).
2. On veut un moment $M = 45$ N · m avec la même force. Quel bras de levier d faut-il ? (isoler d)

Corrigé

1. $M = 150 \times 0{,}2 = 30$ N · m.
2. $d = \dfrac{M}{F} = \dfrac{45}{150} = 0{,}3$ m.

Activité 3 • Vecteur défini par deux points (programmation d'une trajectoire) — MÉCANIQUE

Outil réinvesti : *composantes, norme* ***Lien référentiel :*** *S2.4 — lecture de plan, S8.3 — CFAO*

Sur un plan d'usinage, deux points sont repérés par leurs coordonnées (en mm) : un point de référence $A(10\,;\, 20)$ et un point à percer $B(40\,;\, 60)$.

1. Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (rappel : $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,;\, y_B - y_A)$).
2. Calculer la norme de $\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire la distance entre les deux points.

Corrigé

1. $\overrightarrow{AB} = (40 - 10\,;\, 60 - 20) = (30\,;\, 40)$.
2. $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2\,500} = 50$ mm.

Activité 4 • Vecteur vitesse d'avance d'un outil deux axes — MÉCANIQUE

Outil réinvesti : *norme, direction* ***Lien référentiel :*** *S11.1 — cinématiques de machines, machines multiaxes*

Sur une machine à commande numérique, un outil avance simultanément suivant deux axes. Sa vitesse a pour composantes $v_x = 600$ mm/min et $v_y = 800$ mm/min.

1. Calculer la norme du vecteur vitesse d'avance (la vitesse résultante de l'outil).
2. Déterminer l'angle θ que fait le vecteur avec l'axe X ($\tan\theta = v_y/v_x$).

Corrigé

1. $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{600^2 + 800^2} = \sqrt{1\,000\,000} = 1\,000$ mm/min.
2. $\tan\theta = \dfrac{800}{600} \approx 1{,}33$, donc $\theta \approx 53°$.

Activité 5 • Composition de deux vitesses — PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *somme de vecteurs, norme* ***Lien référentiel :*** *S15 — composition des vitesses*

Un nageur traverse une rivière. Il nage à 4 m/s perpendiculairement à la berge, tandis que le courant l'emporte à 3 m/s le long de la rivière. Sa vitesse réelle est la somme (vectorielle) de ces deux vitesses perpendiculaires.

1. Calculer la norme de la vitesse réelle du nageur.
2. Calculer l'angle de sa trajectoire par rapport à la direction où il nage ($\tan\theta = 3/4$).

Corrigé

1. $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ m/s.
2. $\tan\theta = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$, donc $\theta \approx 37°$: le nageur est dévié par le courant.

Activité 6 • Poussée d'Archimède : forces verticales opposées — PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *somme de vecteurs colinéaires, signe* ***Lien référentiel :*** *S15 — statique des fluides*

Un objet plongé dans l'eau subit deux forces verticales opposées : son poids $P = 50$ N (vers le bas) et la poussée d'Archimède $F_A = 30$ N (vers le haut). La force résultante est leur somme vectorielle ; comme elles sont opposées, on soustrait leurs valeurs.

1. Calculer la valeur de la force résultante et préciser son sens.
2. En déduire si l'objet coule ou remonte.

Corrigé

1. Résultante $= 50 - 30 = 20$ N, dirigée vers le bas (le poids l'emporte).
2. La résultante est vers le bas : l'objet coule.