



Lycée Jean-Baptiste de Baudre
Agen

Parcours de consolidation en mathématiques

Semaine 6 • extrait du parcours complet

Spécialité CPRP — Conception des Processus de Réalisation de Produits

Version étudiant
(énoncés et espaces de réponse)

De la rentrée aux vacances de la Toussaint

Semaine 6 : Dérivation

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) deux exercices classiques d'application (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte CPRP. Des exercices et des activités supplémentaires figurent dans le *cahier d'approfondissement*.

Rappel mathématique

Cette semaine consolide la notion de dérivée d'une fonction et son interprétation comme taux de variation. La dérivation est l'outil de la première année de BTS pour étudier les variations, identifier les extremums et modéliser des grandeurs qui évoluent (vitesse, courant, débit). Chaque notion est suivie d'un petit exercice d'application immédiate ; les exercices classiques qui suivent le rappel reprennent l'ensemble des notions.

§1. Taux de variation et nombre dérivé

Un véhicule parcourt 120 km en 2 heures : sa vitesse moyenne est de 60 km/h, mais son compteur n'a presque jamais affiché exactement 60. Passer de la moyenne sur un intervalle à la valeur à un instant donné, c'est tout l'objet de la dérivée.

Définition – taux de variation moyen

Le *taux de variation moyen* d'une fonction f entre deux valeurs a et b (avec $a \neq b$) est

$$\tau = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

C'est la pente de la droite qui joint les deux points de la courbe d'abscisses a et b : on retrouve exactement le calcul de pente de la semaine 5 (§3).

À vous – application 1

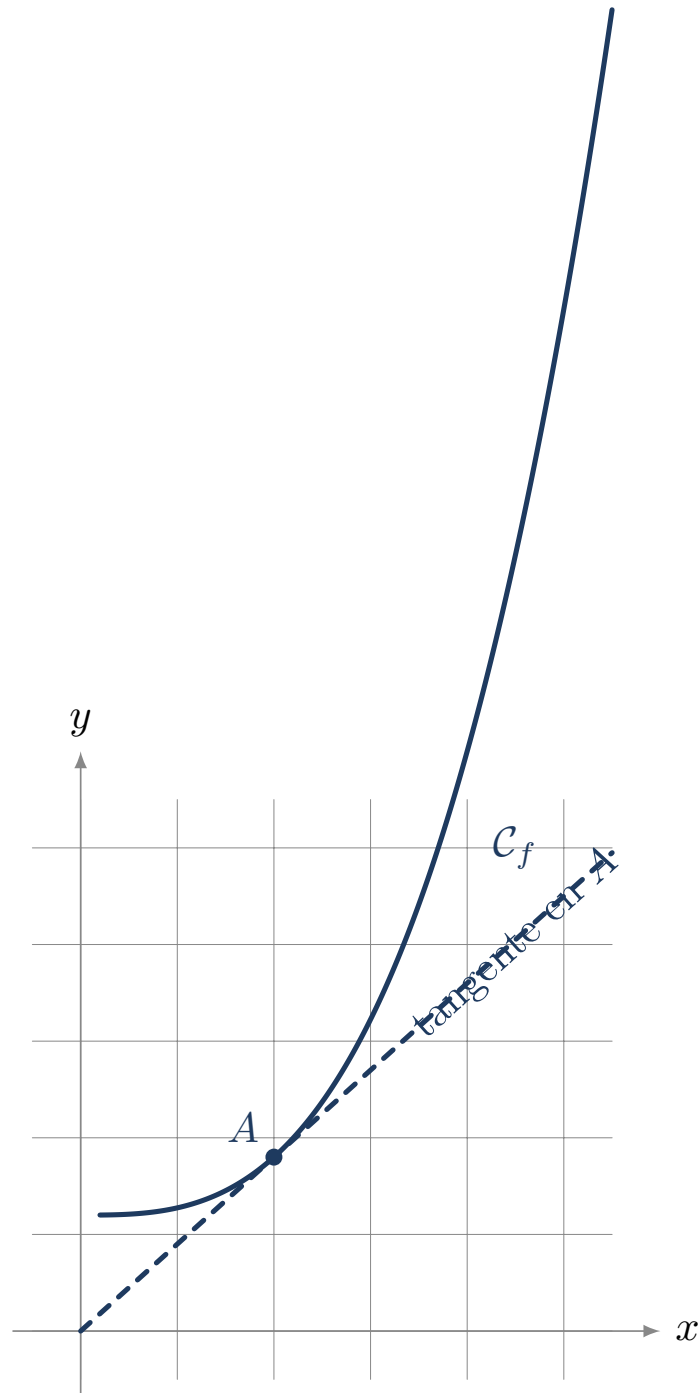
Calculer les taux de variation moyens demandés.

- Pour $f(x) = x^2$, entre $a = 1$ et $b = 3$.
- Pour $f(x) = x^2$, entre $a = 1$ et $b = 1,5$.
- Un mobile est en $x(0) = 0$ m et en $x(4) = 24$ m (t en secondes). Calculer sa vitesse moyenne entre ces deux instants.

Réponse :

Définition – nombre dérivé

Le *nombre dérivé* d'une fonction f en un point d'abscisse a , noté $f'(a)$, est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe représentative de f au point $(a; f(a))$. C'est aussi le *taux de variation instantané* de f en a : il indique à quelle vitesse f change autour de cette valeur.

**À vous – application 2**

Déterminer un nombre dérivé à partir d'une tangente.

- a) La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 passe par les points $(2; 3)$ et $(5; 12)$.
En déduire $f'(2)$.

- b) La tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1 passe par $(1; 6)$ et $(4; 0)$. En déduire $g'(1)$, puis dire si g croît ou décroît autour de 1.
- c) La tangente à la courbe de h au point d'abscisse 5 est horizontale. Que vaut $h'(5)$?

Réponse :

§2. Fonction dérivée

Recalculer une pente point par point serait interminable. On établit donc, une fois pour toutes, une fonction qui donne la pente en tout point : c'est elle que l'on manipule ensuite dans tous les calculs de BTS.

Définition – fonction dérivée

La fonction dérivée de f , notée f' , associe à chaque x son nombre dérivé $f'(x)$ (lorsqu'il existe).

Propriété – dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
k (constante)	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	$n x^{n-1}$

À vous – application 3

Dériver en utilisant le tableau ci-dessus.

- a) $f(x) = x^5$.
- b) $f(x) = x^4$.
- c) $f(x) = 12$, puis $g(x) = x$.

Réponse :

Méthode – du nombre dérivé à la fonction dérivée

Pour obtenir un nombre dérivé $f'(a)$, on calcule d'abord la fonction f' , puis on y remplace x par a . C'est toujours dans cet ordre : on dérive, ensuite on remplace.

À vous – application 4

Dériver, puis calculer le nombre dérivé demandé et l'interpréter.

- $f(x) = x^4$: calculer $f'(2)$.
- $f(x) = x^3$: calculer $f'(2)$ et $f'(-1)$.
- $f(x) = x^2$: calculer $f'(0)$. Que peut-on en dire de la tangente en ce point ?

Réponse :

§3. Règles de dérivation

Les modèles rencontrés en BTS (coût, position, charge, débit) sont presque toujours des polynômes. Trois règles suffisent alors à les dériver entièrement, sans jamais revenir à la définition.

Propriété – opérations sur les dérivées

Pour deux fonctions u et v et un réel k :

$$(k u)' = k u', \quad (u + v)' = u' + v', \quad (u - v)' = u' - v'.$$

Ces règles permettent de dériver tous les *polynômes*.

À vous – application 5

Dériver les fonctions suivantes.

- $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$.
- $g(t) = t^2 + 3t$.
- $h(x) = 7x^3 - 2x + 1$.

Réponse :

Méthode – dériver un polynôme terme à terme

On dérive chaque terme séparément, en gardant son signe :

- un terme $k x^n$ donne $k n x^{n-1}$: on multiplie par l'exposant, puis on baisse l'exposant de 1 ;
- un terme en x donne son coefficient ;
- le terme constant disparaît.

Point de vigilance. La dérivée d'une constante est nulle : pour $f(x) = 4$, on a $f'(x) = 0$, et non 4. Le terme constant d'un polynôme n'a donc aucune influence sur sa dérivée : $x^2 + 7$ et $x^2 - 100$ ont la même dérivée $2x$.

À vous – application 6

Dériver, puis calculer la valeur demandée.

- $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 9$: calculer $f'(1)$.
- $g(t) = 0,5t^2 + 2t + 100$: calculer $g'(4)$.
- $h(x) = -x^2 + 6x - 11$: calculer $h'(3)$ et interpréter le résultat.

Réponse :

§4. Interprétation : taux de variation

Vitesse, courant, débit : beaucoup de grandeurs du technicien ne sont rien d'autre que la dérivée d'une autre grandeur par rapport au temps. Le signe de cette dérivée dit dans quel sens le système évolue.

Méthode – interpréter f'

La dérivée $f'(a)$ donne le **taux de variation instantané** de f en a .

- Si $f'(a) > 0$, f est croissante autour de a .
- Si $f'(a) < 0$, f est décroissante autour de a .
- Si $f'(a) = 0$, la courbe a une tangente horizontale en a (souvent un *extremum*).

À vous – application 7

Pour $f(x) = x^2 - 8x + 3$, on a $f'(x) = 2x - 8$.

- Calculer $f'(1)$ et en déduire le sens de variation de f autour de 1.
- Calculer $f'(6)$ et conclure de même.
- Déterminer la valeur de x pour laquelle la tangente est horizontale.

Réponse :

Propriété – grandeurs dérivées en sciences physiques

Lorsqu'une grandeur décrit l'évolution d'une autre au cours du temps, elle en est la dérivée :

- position $x(t) \rightarrow$ vitesse instantanée $v(t) = x'(t)$;
- charge $q(t) \rightarrow$ intensité $i(t) = q'(t)$;
- volume $V(t) \rightarrow$ débit $D(t) = V'(t)$.

À vous – application 8

Dériver pour obtenir la grandeur demandée.

- La position d'un mobile est $x(t) = t^2 + 5t$ (en mètres, t en secondes). Calculer $v(t)$, puis $v(3)$.

- b) La charge d'un condensateur est $q(t) = 0,5t^2 + 2t$ (en coulombs). Calculer $i(t)$, puis $i(4)$.
 c) Le volume dans une cuve est $V(t) = 3t^2 + 5t$ (en litres, t en minutes). Calculer le débit $D(t)$, puis $D(10)$.

Réponse :

§5. Optimisation : trouver un extremum

Quelle quantité produire pour que le bénéfice soit maximal ? Quelles dimensions donner à une pièce pour utiliser le moins de matière ? Ces questions se ramènent toutes à chercher là où la dérivée s'annule.

Méthode – rechercher un extremum

Pour trouver les valeurs de x où une fonction f admet un maximum ou un minimum :

1. on calcule $f'(x)$;
2. on résout $f'(x) = 0$;
3. on étudie le signe de $f'(x)$ autour des solutions trouvées pour conclure.

Si le signe passe du $-$ au $+$, c'est un **minimum** ; s'il passe du $+$ au $-$, c'est un **maximum**.

À vous – application 9

Déterminer l'extremum de chaque fonction, en précisant sa nature.

- a) $C(x) = x^2 - 6x + 10$.
- b) $f(x) = -x^2 + 4x + 1$.
- c) $g(x) = 2x^2 - 12x + 5$.

Réponse :

Méthode – optimiser une grandeur en contexte

Quand l'énoncé décrit une situation plutôt qu'une fonction, on procède en trois temps :

1. on choisit une inconnue x et on exprime la grandeur à optimiser en fonction de x seule, en utilisant la contrainte de l'énoncé ;
2. on dérive et on résout $f'(x) = 0$;
3. on revient à la question posée en interprétant le résultat (dimensions, quantité, coût...).

À vous – application 10

Mettre en fonction, puis optimiser. Un rectangle a un périmètre de 40 m et on note x sa longueur.

- a) Exprimer sa largeur en fonction de x , puis son aire $A(x)$.
- b) Calculer $A'(x)$ et résoudre $A'(x) = 0$.

c) En déduire les dimensions du rectangle d'aire maximale, et cette aire.

Réponse :

Exercices classiques

Deux exercices d'application pour mettre en œuvre les notions du rappel sur une situation complète. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. D'autres exercices, ainsi que les activités en contexte métier, figurent dans le *cahier d'approfondissement*.

Exercice 1

La position d'un mobile est donnée par $x(t) = 0,5t^2 + 2t$, avec t en secondes et x en mètres.

1. Calculer $x(0)$ et $x(6)$, puis la vitesse moyenne du mobile entre ces deux instants.
2. Calculer $v(t) = x'(t)$, puis la vitesse instantanée à $t = 6$ s.
3. Déterminer l'instant auquel la vitesse instantanée atteint 10 m/s.

Réponse :

Exercice 2

Une cuve se remplit, mais de plus en plus lentement. Le volume qu'elle contient, en litres, est donné par $V(t) = -0,5t^2 + 20t$, où t est le temps en minutes.

1. Calculer $V(0)$ et $V(10)$.
2. Calculer le débit $D(t) = V'(t)$, puis le débit à $t = 0$ et à $t = 10$ minutes. Le remplissage ralentit-il bien ?
3. Déterminer l'instant auquel le débit s'annule. Que se passe-t-il physiquement à cet instant ?

Réponse :

Activités d'application

Activité 1 • De la position à l'accélération d'un axe d'usinage

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : dérivation d'un polynôme **Lien référentiel** : S11.1 — machines à commande numérique

La position d'un axe d'usinage (en mm) est donnée par $X(t) = 0,5t^2 + 2t$, avec t en secondes. On rappelle que la vitesse est la dérivée de la position ($V = X'$) et l'accélération la dérivée de la vitesse ($a = V'$).

1. Déterminer l'expression de la vitesse $V(t)$, puis de l'accélération $a(t)$.
2. En déduire la vitesse de l'axe à l'instant $t = 3$ s.

Réponse :

Activité 2 • Nombre dérivé et tangente

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : nombre dérivé, coefficient directeur **Lien référentiel** : lecture d'une courbe, pente

Soit la fonction $f(x) = x^2$. On rappelle que le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a .

1. Déterminer l'expression de la fonction dérivée $f'(x)$.
2. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 3$.

Réponse :

Activité 3 • Optimisation d'un coût d'usinage

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : dérivation, signe de la dérivée, extremum **Lien référentiel :** S8.6 — estimation des coûts de processus

Le coût d'usinage d'une série de pièces (en euros par pièce) est modélisé par $C(x) = x^2 - 6x + 10$, où x est un paramètre de réglage (par exemple, la vitesse de coupe normalisée). On rappelle qu'un minimum est atteint là où la dérivée s'annule.

1. Calculer la dérivée $C'(x)$, puis résoudre $C'(x) = 0$.
2. En déduire le réglage x qui minimise le coût et la valeur de ce coût minimal.

Réponse :

Activité 4 • Débit instantané de copeaux

MÉCANIQUE

Outil réinvesti : dérivation, taux de variation **Lien référentiel :** S7.2 — enlèvement de matière

Le volume cumulé de copeaux produits par une machine (en cm^3) évolue selon $V(t) = t^2 + 3t$, avec t en minutes. Le débit instantané de copeaux est le taux de variation du volume, c'est-à-dire sa dérivée $V'(t)$.

1. Déterminer l'expression du débit $V'(t)$.
2. Calculer le débit à l'instant $t = 4$ min.

Réponse :

Activité 5 • Vitesse d'un objet en chute

PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : dérivation d'un polynôme **Lien référentiel :** S15 — cinématique (chute)

En première approximation, la distance parcourue par un objet en chute (en mètres) est $x(t) = 5t^2$, avec t en secondes. La vitesse est la dérivée de la position ($v = x'$).

1. Déterminer l'expression de la vitesse $v(t)$.
2. Calculer la vitesse à l'instant $t = 3$ s.

Réponse :

Activité 6 • Vitesse de refroidissement

PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : dérivation d'une fonction affine, signe **Lien référentiel :** S15 — thermique

La température d'une pièce qui refroidit (en °C) suit la loi $T(t) = 80 - 5t$, avec t en minutes. La vitesse de refroidissement est le taux de variation de la température, c'est-à-dire $T'(t)$.

1. Calculer $T'(t)$.
2. Interpréter le signe et la valeur du résultat.

Réponse :