Chapitre 6

Semaine 6 : Dérivation

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) des exercices classiques d'application directe (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte CPRP, qui réinvestissent ces notions dans des situations métier.

Rappel mathématique

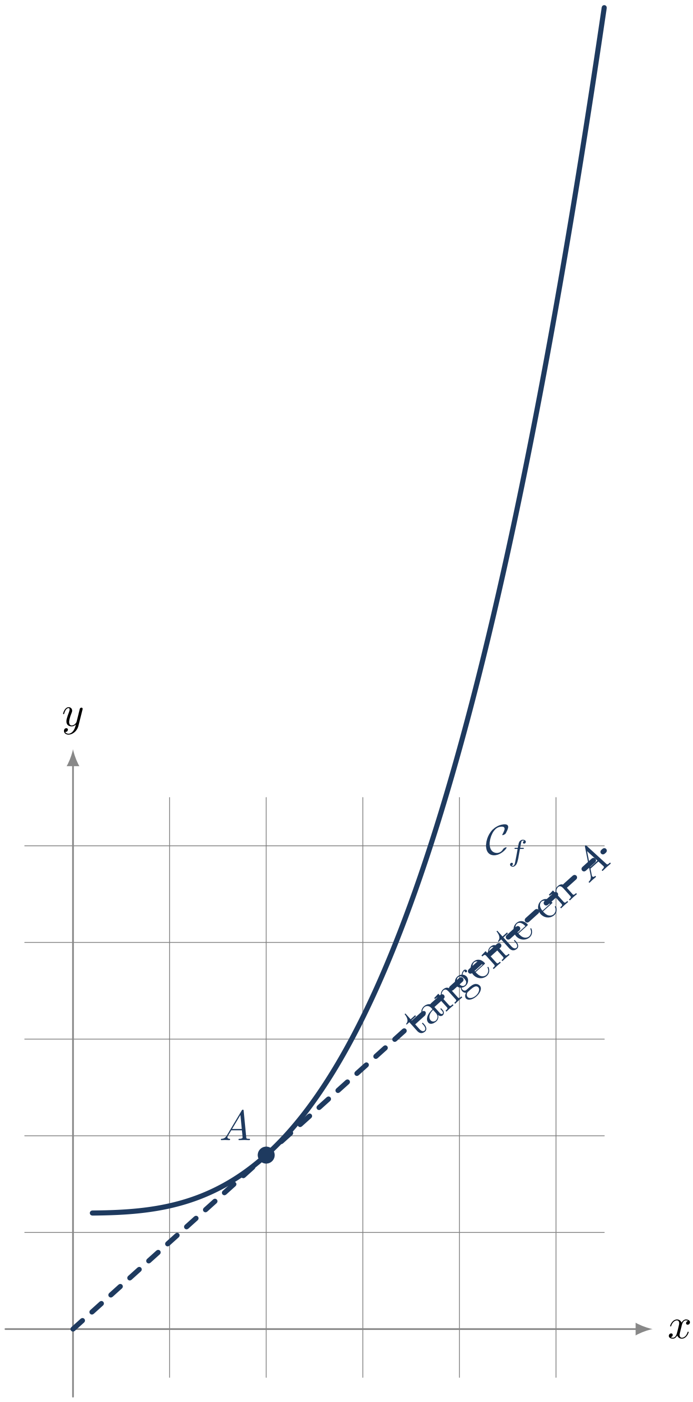
Cette semaine consolide la notion de dérivée d'une fonction et son interprétation comme taux de variation. La dérivation est l'outil de la première année de BTS pour étudier les variations, identifier les extremums et modéliser des grandeurs qui évoluent (vitesse, courant, débit).

§1. Nombre dérivé et tangente

Définition – nombre dérivé

Le *nombre dérivé* d'une fonction f en un point d'abscisse a, noté $f'(a)$, est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe représentative de f au point $(a\,;\,f(a))$.

C'est aussi le *taux de variation instantané* de f en a : il indique à quelle vitesse f change autour de cette valeur.



§2. Fonction dérivée

Définition – fonction dérivée

La fonction dérivée de f, notée f', associe à chaque x son nombre dérivé $f'(x)$ (lorsqu'il existe).

Propriété – dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
k (constante)	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	$n\,x^{n-1}$

Exemple – Si $f(x) = x^5$, alors $f'(x) = 5\,x^4$.

§3. Règles de dérivation

Propriété – opérations sur les dérivées

Pour deux fonctions u et v et un réel k :

$$(k\,u)' = k\,u'\,, \quad (u+v)' = u' + v'\,, \quad (u-v)' = u' - v'\,.$$

Ces règles permettent de dériver tous les *polynômes*.

Exemple – Si $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$, alors $f'(x) = 3 \times 2x - 5 \times 1 + 0 = 6x - 5$.

Exemple – Si $g(t) = t^2 + 3t$, alors $g'(t) = 2t + 3$.

Point de vigilance. La dérivée d'une constante est nulle : pour $f(x) = 4$, on a $f'(x) = 0$, et non 4.

§4. Interprétation : taux de variation

Méthode – interpréter f'

La dérivée $f'(a)$ donne le **taux de variation instantané** de f en a.

- Si $f'(a) > 0$, f est croissante autour de a.
- Si $f'(a) < 0$, f est décroissante autour de a.
- Si $f'(a) = 0$, la courbe a une tangente horizontale en a (souvent un *extremum*).

Exemple – La position d'un objet mobile est $x(t)$. Sa vitesse instantanée est $v(t) = x'(t)$.

Exemple – La charge d'un condensateur est $q(t)$. Le courant qui le traverse est $i(t) = q'(t)$.

§5. Optimisation : trouver un extremum

Méthode – rechercher un extremum

Pour trouver les valeurs de x où une fonction f admet un maximum ou un minimum :

1. On calcule $f'(x)$.
2. On résout $f'(x) = 0$.
3. On étudie le signe de $f'(x)$ autour des solutions trouvées pour conclure (minimum ou maximum).

Exemple – *Soit* $C(x) = x^2 - 6x + 10$. *On a* $C'(x) = 2x - 6$.
$C'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$. *Pour* $x < 3$, $C'(x) < 0$ *(décroissante) ; pour* $x > 3$, $C'(x) > 0$ *(croissante). Donc* C *admet un minimum en* $x = 3$, *et* $C(3) = 9 - 18 + 10 = 1$.

Exercices classiques

Les huit premiers sont à traiter en priorité ; les quatre suivants, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

- $f(x) = x^2$
- $f(x) = x^3$
- $f(x) = x^4$

Réponse :

Exercice 2

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

- $f(x) = 5$
- $f(x) = 3x$
- $f(x) = 7x + 4$

Réponse :

Exercice 3

Soit $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$. Calculer $f'(x)$, puis $f'(2)$.

Réponse :

Exercice 4

Soit $g(t) = 2t^2 + 3t - 1$. Calculer $g'(t)$, puis $g'(0)$ et $g'(5)$.

Réponse :

Exercice 5

Pour la fonction $f(x) = x^2$, calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 4$.

Réponse :

Exercice 6

Soit $f(x) = -x^2 + 4x$. Calculer $f'(x)$, puis résoudre $f'(x) = 0$.

Réponse :

Exercice 7

La position d'un objet mobile est donnée par $x(t) = t^2 + 2t$, avec t en secondes et x en mètres. Sa vitesse instantanée est $v(t) = x'(t)$.

- Calculer $v(t)$.
- Calculer la vitesse à $t = 5$ s.

Réponse :

Exercice 8

Soit $C(x) = x^2 - 8x + 20$ une fonction de coût. Déterminer la valeur de x qui minimise C, et calculer le coût minimal.

Réponse :

Pour aller plus loin

Exercice 9

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$. Calculer $f'(x)$, puis résoudre $f'(x) = 0$.

Réponse :

Exercice 10

Soit $f(x) = x^2$. Écrire l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 3$ (rappel : équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$).

Réponse :

Exercice 11

La charge d'un condensateur (en coulombs) suit $q(t) = 0{,}5\,t^2 + 2t$. Calculer le courant $i(t) = q'(t)$ qui le traverse, puis le courant à l'instant $t = 4$ s.

Réponse :

Exercice 12

Soit $f(x) = 2x^2 - 12x + 5$. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

Réponse :

Activités d'application

Activité 1 • De la position à l'accélération d'un axe d'usinage — MÉCANIQUE

Outil réinvesti : *dérivation d'un polynôme* ***Lien référentiel :*** *S11.1 — machines à commande numérique*

La position d'un axe d'usinage (en mm) est donnée par $X(t) = 0{,}5\,t^2 + 2\,t$, avec t en secondes. On rappelle que la vitesse est la dérivée de la position ($V = X'$) et l'accélération la dérivée de la vitesse ($a = V'$).

1. Déterminer l'expression de la vitesse $V(t)$, puis de l'accélération $a(t)$.
2. En déduire la vitesse de l'axe à l'instant $t = 3$ s.

Réponse :

Activité 2 • Nombre dérivé et tangente — MÉCANIQUE

Outil réinvesti : *nombre dérivé, coefficient directeur* ***Lien référentiel :*** *lecture d'une courbe, pente*

Soit la fonction $f(x) = x^2$. On rappelle que le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a.

1. Déterminer l'expression de la fonction dérivée $f'(x)$.
2. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 3$.

Réponse :

Activité 3 • Optimisation d'un coût d'usinage — MÉCANIQUE

Outil réinvesti : *dérivation, signe de la dérivée, extremum* ***Lien référentiel :*** *S8.6 — estimation des coûts de processus*

Le coût d'usinage d'une série de pièces (en euros par pièce) est modélisé par $C(x) = x^2 - 6x + 10$, où x est un paramètre de réglage (par exemple, la vitesse de coupe normalisée). On rappelle qu'un minimum est atteint là où la dérivée s'annule.

1. Calculer la dérivée $C'(x)$, puis résoudre $C'(x) = 0$.
2. En déduire le réglage x qui minimise le coût et la valeur de ce coût minimal.

Réponse :

Activité 4 • Débit instantané de copeaux MÉCANIQUE

Outil réinvesti : *dérivation, taux de variation* ***Lien référentiel :*** *S7.2 — enlèvement de matière*

Le volume cumulé de copeaux produits par une machine (en cm^3) évolue selon $V(t) = t^2 + 3t$, avec t en minutes. Le débit instantané de copeaux est le taux de variation du volume, c'est-à-dire sa dérivée $V'(t)$.

1. Déterminer l'expression du débit $V'(t)$.
2. Calculer le débit à l'instant $t = 4$ min.

Réponse :

Activité 5 • Vitesse d'un objet en chute PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *dérivation d'un polynôme* ***Lien référentiel :*** *S15 — cinématique (chute)*

En première approximation, la distance parcourue par un objet en chute (en mètres) est $x(t) = 5\,t^2$, avec t en secondes. La vitesse est la dérivée de la position ($v = x'$).

1. Déterminer l'expression de la vitesse $v(t)$.
2. Calculer la vitesse à l'instant $t = 3$ s.

Réponse :

Activité 6 • Vitesse de refroidissement PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *dérivation d'une fonction affine, signe* ***Lien référentiel :*** *S15 — thermique*

La température d'une pièce qui refroidit (en °C) suit la loi $T(t) = 80 - 5\,t$, avec t en minutes. La vitesse de refroidissement est le taux de variation de la température, c'est-à-dire $T'(t)$.

1. Calculer $T'(t)$.
2. Interpréter le signe et la valeur du résultat.

Réponse :