Chapitre 1

Semaine 1 : Calcul, formules et unités

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) des exercices classiques d'application directe (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte Électrotech, qui réinvestissent ces notions dans des situations métier.

Rappel mathématique

Cette première semaine consolide les gestes de calcul élémentaires : manipuler les fractions, manier les puissances et la notation scientifique, convertir des unités sans se tromper, isoler une grandeur dans une formule. Ces gestes seront réinvestis dans toutes les semaines suivantes.

§1. Calcul sur les fractions

Définition – fraction

Une fraction $\frac{a}{b}$ représente le partage de a par b (avec $b \neq 0$). Le nombre a est le *numérateur*, b est le *dénominateur*.

Propriété – simplifier

Si l'on multiplie (ou divise) numérateur et dénominateur par un même nombre non nul, la fraction ne change pas de valeur :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}, \quad k \neq 0.$$

Exemple – $\frac{12}{18} = \frac{12 \div 6}{18 \div 6} = \frac{2}{3}$.

Propriété – additionner ou soustraire

Pour ajouter (ou retrancher) deux fractions, on les met au **même dénominateur**, puis on additionne (ou retranche) les numérateurs :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,d}{b\,d} + \frac{c\,b}{d\,b} = \frac{a\,d + c\,b}{b\,d}.$$

Exemple – $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2 \times 4}{12} + \frac{1 \times 3}{12} = \frac{8+3}{12} = \frac{11}{12}$.

Propriété – multiplier ou diviser

Pour multiplier deux fractions, on multiplie numérateurs entre eux et dénominateurs entre eux :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

Pour diviser par une fraction, on multiplie par son inverse :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

Exemple – $\frac{3}{5} \times \frac{10}{9} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$. $\frac{5}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{8}$.

Point de vigilance. On additionne avec un dénominateur commun, mais on multiplie *sans* le faire. Confondre les deux est l'erreur la plus fréquente.

§2. Puissances et notation scientifique

Définition – puissance d'un nombre

Pour un entier $n \geq 1$, $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$. On pose $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Propriété – règles de calcul

Pour tous nombres a, b non nuls et entiers m, n :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{m\,n}, \quad (a \times b)^n = a^n \times b^n.$$

Exemple – $10^3 \times 10^{-5} = 10^{3+(-5)} = 10^{-2}$; $(10^{-3})^2 = 10^{-6}$.

Définition – notation scientifique

Un nombre est en notation scientifique s'il s'écrit $a \times 10^n$, avec $1 \leq |a| < 10$ et n entier relatif.

Exemple – $3\,200 = 3{,}2 \times 10^3$; $0{,}000\,034 = 3{,}4 \times 10^{-5}$.

À la calculatrice. Voir l'*Annexe : prise en main de la calculatrice*, §4 (saisie d'une notation scientifique) et §5 (lecture d'un résultat).

§3. Conversions d'unités

Les **préfixes du Système international** permettent d'exprimer une grandeur en multipliant l'unité de base par une puissance de 10 :

Préfixe	Symbole	Facteur	Préfixe	Symbole	Facteur
giga	G	10^9	milli	m	10^{-3}
méga	M	10^6	micro	µ	10^{-6}
kilo	k	10^3	nano	n	10^{-9}

Exemple – $3{,}3\ V = 3{,}3 \times 10^3\ mV = 3\,300\ mV$; $20\ \mu s = 20 \times 10^{-6}\ s = 2 \times 10^{-5}\ s$.

Méthode – conversion d'une aire ou d'un volume

Pour convertir une aire ou un volume entre deux unités, on convertit d'abord la dimension linéaire correspondante, puis on l'élève à la puissance appropriée.
Aire : 1 mm $= 10^{-3}$ m, donc 1 mm$^2 = (10^{-3})^2$ m$^2 = 10^{-6}$ m^2.
Volume : 1 mm $= 10^{-1}$ cm, donc 1 mm$^3 = (10^{-1})^3$ cm$^3 = 10^{-3}$ cm^3.

Point de vigilance. L'erreur classique est de croire que 1 mm$^2 = 10^{-3}$ m^2 (faux : l'exposant doit aussi être au carré).

§4. Isoler une grandeur dans une formule

Dans un calcul métier, on n'utilise pas toujours une formule dans le sens où elle est écrite. Si l'on connaît certaines grandeurs et que l'on cherche celle qui reste, il faut *isoler* cette grandeur.

Méthode – isoler une grandeur

On effectue les opérations inverses, dans l'ordre inverse, sur les deux membres de l'égalité, jusqu'à ce que la grandeur cherchée soit seule.

- Pour annuler une addition, on soustrait ; pour annuler une soustraction, on additionne.
- Pour annuler une multiplication, on divise ; pour annuler une division, on multiplie.
- Pour annuler un carré (sur un nombre positif), on prend la racine carrée.

Exemple – Isoler I dans $U = R \times I$. On divise les deux membres par R : $\dfrac{U}{R} = I$, soit $I = \dfrac{U}{R}$.

Exemple – Isoler h dans $V = L \times \ell \times h$. On divise par $L \times \ell$: $h = \dfrac{V}{L \times \ell}$.

Exemple – Isoler r dans $S = \pi r^2$. On divise par π : $\dfrac{S}{\pi} = r^2$. Puis on prend la racine carrée : $r = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$.

Exercices classiques

Ces exercices courts exercent les gestes mathématiques vus dans le rappel, sans contexte métier. Les corrigés détaillés sont visibles dans la version professeur. Les huit premiers sont à traiter en priorité ; les quatre suivants, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Simplifier les fractions suivantes au maximum.

$$\frac{12}{18}, \quad \frac{15}{25}, \quad \frac{42}{56}.$$

Corrigé

$$\frac{12}{18} = \frac{12/6}{18/6} = \frac{2}{3}\,; \quad \frac{15}{25} = \frac{15/5}{25/5} = \frac{3}{5}\,; \quad \frac{42}{56} = \frac{42/14}{56/14} = \frac{3}{4}.$$

Exercice 2

Calculer en réduisant au même dénominateur :

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\,, \qquad \frac{5}{6}-\frac{1}{2}\,.$$

Corrigé

$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}=\frac{11}{12}$; $\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}-\frac{3}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Exercice 3

Calculer (puis simplifier) :

$$\frac{3}{5}\times\frac{10}{9}\,, \qquad \frac{5}{4}\div\frac{2}{3}\,.$$

Corrigé

$\frac{3}{5}\times\frac{10}{9}=\frac{30}{45}=\frac{2}{3}$; $\frac{5}{4}\div\frac{2}{3}=\frac{5}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{15}{8}$.

Exercice 4

Calculer sans calculatrice :

$$2^5\,, \qquad 10^{-2}\,, \qquad (-3)^2\,, \qquad 5^0\,.$$

Corrigé

$2^5=32$; $10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}=0{,}01$; $(-3)^2=9$; $5^0=1$.

Exercice 5

Écrire en notation scientifique :

$$0{,}000\,034\,, \qquad 5\,200\,000\,, \qquad 12{,}5\,.$$

Corrigé

$0{,}000\,034=3{,}4\times10^{-5}$; $5\,200\,000=5{,}2\times10^{6}$; $12{,}5=1{,}25\times10^{1}$.

Exercice 6

Effectuer les conversions de longueur ou de durée :

- 250 mm en m ;
- 0,04 km en m ;
- 1,5 h en s.

Corrigé

250 mm $=250\times10^{-3}$ m $=0{,}25$ m ; 0,04 km $=0{,}04\times10^{3}$ m $=40$ m ; 1,5 h $=1{,}5\times3\,600$ s $=5\,400$ s.

Exercice 7

Convertir 400 mm^2 en cm^2 puis en m^2, en passant explicitement par la dimension linéaire.

Corrigé

1 mm $= 10^{-1}$ cm, donc 1 mm$^2 = 10^{-2}$ cm^2, donc 400 mm$^2 = 4$ cm^2.
1 mm $= 10^{-3}$ m, donc 1 mm$^2 = 10^{-6}$ m^2, donc 400 mm$^2 = 4 \times 10^{-4}$ m^2.

Exercice 8

Dans chacune des relations suivantes, isoler la grandeur indiquée.

- Dans $y = 3x + 2$, exprimer x en fonction de y.
- Dans $v = \dfrac{d}{t}$, exprimer d, puis t.
- Dans $P = U \times I$, exprimer I.

Corrigé

$y = 3x + 2 \Rightarrow y - 2 = 3x \Rightarrow x = \dfrac{y-2}{3}$.
$v = \dfrac{d}{t} \Rightarrow d = v \times t$; et $t = \dfrac{d}{v}$.
$P = U \times I \Rightarrow I = \dfrac{P}{U}$.

Pour aller plus loin

Exercice 9

Calculer :

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2}.$$

Corrigé

Dénominateur commun 12 : $\dfrac{9}{12} + \dfrac{10}{12} - \dfrac{6}{12} = \dfrac{13}{12}$.

Exercice 10

Simplifier l'expression à l'aide des règles de calcul sur les puissances :

$$\frac{10^5 \times 10^{-2}}{10^4}.$$

Corrigé

$\dfrac{10^5 \times 10^{-2}}{10^4} = \dfrac{10^{5-2}}{10^4} = \dfrac{10^3}{10^4} = 10^{3-4} = 10^{-1} = 0{,}1$.

Exercice 11

Convertir 2 500 mm^3 en cm^3, puis en litres (1 L $= 10^3$ cm^3).

Corrigé

$1\ \text{mm}^3 = 10^{-3}\ \text{cm}^3$, donc $2\,500\ \text{mm}^3 = 2{,}5\ \text{cm}^3$.
Puis $2{,}5\ \text{cm}^3 = 2{,}5 \times 10^{-3}\ \text{L} = 0{,}002\,5\ \text{L}$.

Exercice 12

Isoler h dans la formule du volume d'un cylindre $V = \pi\, r^2\, h$, puis isoler r dans la même formule.

Corrigé

$h = \dfrac{V}{\pi\, r^2}$.

Pour isoler r : on divise par $\pi\, h$: $\dfrac{V}{\pi\, h} = r^2$, puis on prend la racine carrée : $r = \sqrt{\dfrac{V}{\pi\, h}}$.

Activités d'application

Activité 1 • Loi d'Ohm ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *application d'une formule, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :*** *S2.1 — circuits électriques en régime continu*

La loi d'Ohm relie la tension U aux bornes d'un conducteur ohmique (en volts), la résistance R (en ohms, Ω) et l'intensité I qui le traverse (en ampères) :

$$U = R \times I\,.$$

1. Pour une résistance $R = 220\ \Omega$ traversée par un courant $I = 0{,}5$ A, calculer U.
2. On applique une tension $U = 24$ V aux bornes d'une résistance $R = 12\ \Omega$. Calculer I. (isoler I)

Corrigé

1. $U = 220 \times 0{,}5 = 110$ V.
2. $I = \dfrac{U}{R} = \dfrac{24}{12} = 2$ A.

Activité 2 • Puissance électrique en courant continu ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *application d'une formule, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :*** *S2.1 — puissance et énergie électriques*

La puissance électrique d'un récepteur en courant continu vaut

$$P = U \times I\,,$$

avec P en watts, U en volts et I en ampères.

1. Un moteur est alimenté sous $U = 24$ V avec un courant $I = 5$ A. Calculer la puissance P.
2. Pour atteindre $P = 96$ W sous la même tension, calculer l'intensité I. (isoler I)

Corrigé

1. $P = 24 \times 5 = 120$ W.
2. $I = \dfrac{P}{U} = \dfrac{96}{24} = 4$ A.

Activité 3 • Puissance dissipée par effet Joule — ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *application d'une formule, le carré d'un nombre* ***Lien référentiel :*** *S2.1 — effet Joule*

Dans une résistance traversée par un courant continu, la puissance dissipée vaut

$$P = R \times I^2 .$$

1. Pour $R = 10\ \Omega$ et $I = 3$ A, calculer P.
2. Pour la même résistance, on multiplie l'intensité par 2 ($I = 6$ A). Calculer la nouvelle puissance, puis indiquer par quel facteur elle a été multipliée.

Corrigé

1. $P = 10 \times 3^2 = 10 \times 9 = 90$ W.
2. $P = 10 \times 6^2 = 10 \times 36 = 360$ W, soit 4 fois plus : l'intensité intervient au carré, donc la doubler quadruple la puissance ($2^2 = 4$).

Activité 4 • Énergie consommée, conversion kWh ↔ J — ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *application d'une formule, conversion d'unités composées, notation scientifique* ***Lien référentiel :*** *S2.1 — énergie électrique, bilan énergétique*

L'énergie consommée par un appareil de puissance P pendant une durée t vaut $W = P \times t$. Selon les unités choisies, le résultat s'exprime en joules (P en W, t en s) ou en kilowattheures (P en kW, t en h).

1. Un radiateur de $P = 2$ kW fonctionne pendant $t = 5$ h. Calculer l'énergie W en kWh.
2. Sachant que 1 kW $= 10^3$ W et 1 h $= 3\,600$ s, exprimer 1 kWh en joules.
3. En déduire W en joules.
4. Pour le même radiateur, combien d'heures faut-il pour consommer 8 kWh ? (isoler t)

Corrigé

1. $W = 2 \times 5 = 10$ kWh.
2. 1 kWh $= 10^3 \times 3\,600 = 3{,}6 \times 10^6$ J.
3. $W = 10 \times 3{,}6 \times 10^6 = 3{,}6 \times 10^7$ J.
4. $t = \dfrac{W}{P} = \dfrac{8}{2} = 4$ h.

Activité 5 • Énergie thermique sensible — PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *application d'une formule, conversion d'unités* ***Lien référentiel :*** *S15 — Thermique (capacité thermique massique)*

Pour élever la température d'une masse m d'un corps de la valeur ΔT, il faut fournir une énergie

$$Q = m \times c \times \Delta T ,$$

où c est la capacité thermique massique. Pour l'eau, $c = 4\,180$ J/(kg · K).

1. Calculer l'énergie Q nécessaire pour élever la température de $m = 2$ kg d'eau de $\Delta T = 30$ °C (résultat en joules).
2. Convertir ce résultat en kilojoules (1 kJ = 10^3 J).

Corrigé

1. $Q = 2 \times 4\,180 \times 30 = 250\,800$ J.
2. $Q \approx 251$ kJ.

Activité 6 • Pression au fond d'un réservoir

PHYSIQUE APPLIQUÉE

Outil réinvesti : *application d'une formule, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :*** *S15 — Statique des fluides*

Le principe fondamental de l'hydrostatique donne la différence de pression $\Delta P = \rho \times g \times h$. Pour l'eau, $\rho = 1\,000$ kg/m^3 et $g \approx 10$ N/kg.

1. Calculer ΔP à une profondeur $h = 3$ m (en pascals).
2. À quelle profondeur h atteint-on $\Delta P = 50\,000$ Pa ? (isoler h)

Corrigé

1. $\Delta P = 1\,000 \times 10 \times 3 = 30\,000$ Pa.
2. $h = \dfrac{\Delta P}{\rho\, g} = \dfrac{50\,000}{1\,000 \times 10} = 5$ m.