

# Chapitre 3

## Semaine 3 : Trigonométrie

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) des exercices classiques d'application directe (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte Électrotech, qui réinvestissent ces notions dans des situations métier.

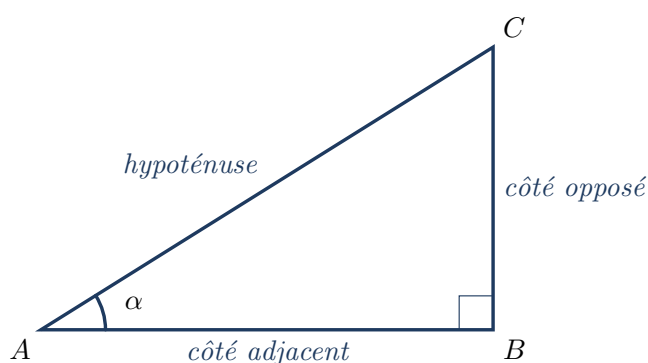
### Rappel mathématique

Cette semaine consolide les outils de la trigonométrie du triangle rectangle : théorème de Pythagore, et relations entre les côtés et les angles via sinus, cosinus et tangente. Ces outils sont mobilisés dès qu'on travaille sur une géométrie inclinée, une force décomposée, ou un signal périodique.

#### §1. Triangle rectangle : vocabulaire

Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit est appelé **hypoténuse** ; c'est toujours le côté le plus long. Les deux autres côtés forment les *côtés de l'angle droit*. Pour un angle aigu  $\alpha$  donné du triangle, on distingue :

- le **côté opposé** à  $\alpha$  : le côté qui ne touche pas  $\alpha$  ;
- le **côté adjacent** à  $\alpha$  : le côté de l'angle droit qui touche  $\alpha$ .



#### §2. Théorème de Pythagore

##### Propriété – théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés :

$$(\text{hypoténuse})^2 = (\text{côté 1})^2 + (\text{côté 2})^2.$$

*Exemple* – Pour un triangle rectangle de côtés  $a = 3$ ,  $b = 4$  : l'hypoténuse vaut  $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ .

**Réciproque utile.** Si l'on connaît l'hypoténuse  $c$  et un côté  $a$ , on isole l'autre côté :  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ .

### §3. Sinus, cosinus, tangente

#### Définition – rapports trigonométriques

Pour un angle aigu  $\alpha$  d'un triangle rectangle :

$$\sin \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$

**Moyen mnémotechnique : SOH-CAH-TOA.** *Sinus = Opposé / Hypoténuse, Cosinus = Adjacent / Hypoténuse, Tangente = Opposé / Adjacent.*

*Exemple* – Dans un triangle rectangle avec  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\sin 30^\circ = 0,5$ . Si l'hypoténuse vaut 10 cm, le côté opposé vaut  $10 \times 0,5 = 5$  cm.

### §4. Valeurs particulières

#### Propriété – angles remarquables

Angle $\alpha$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

On retient au minimum  $\sin 30^\circ = 0,5$  et  $\cos 60^\circ = 0,5$  : les autres se retrouvent à la calculatrice.

**À la calculatrice.** Avant tout calcul de sinus, cosinus ou tangente, vérifier que la calculatrice est bien en mode **degré** (voir l'Annexe : prise en main de la calculatrice, §1).

### §5. Trouver un angle à partir d'un rapport

#### Méthode – retrouver un angle (trigonométrie inverse)

Si l'on connaît la valeur d'un rapport trigonométrique et qu'on cherche l'angle correspondant, on utilise les fonctions *inverses* :

$$\alpha = \sin^{-1}(\dots) \quad \text{ou} \quad \alpha = \cos^{-1}(\dots) \quad \text{ou} \quad \alpha = \tan^{-1}(\dots).$$

On les note aussi arcsin, arccos, arctan. La calculatrice y accède par SHIFT puis la touche correspondante.

*Exemple* – Si  $\tan \alpha = 0,75$ , alors  $\alpha = \tan^{-1}(0,75) \approx 36,87^\circ$ .

**Point de vigilance.** L'unité du résultat dépend du mode actif. En mode degré,  $\tan^{-1}(1) = 45^\circ$  ; en mode radian,  $\tan^{-1}(1) \approx 0,7854$ . **Toujours vérifier le mode** (voir Annexe Calculatrice §8).

### Exercices classiques

Les huit premiers sont à traiter en priorité ; les quatre suivants, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

#### Exercice 1

Un triangle rectangle a des côtés de l'angle droit  $a = 6$  cm et  $b = 8$  cm. Calculer la longueur de l'hypoténuse.

##### Corrigé

$$c = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm.}$$

#### Exercice 2

Un triangle rectangle a une hypoténuse  $c = 13$  cm et un côté  $a = 5$  cm. Calculer la longueur du second côté.

##### Corrigé

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm.}$$

#### Exercice 3

Calculer (à la calculatrice, en mode degré) :

$$\sin 30^\circ, \quad \cos 60^\circ, \quad \tan 45^\circ, \quad \sin 90^\circ.$$

##### Corrigé

$$\sin 30^\circ = 0,5 ; \quad \cos 60^\circ = 0,5 ; \quad \tan 45^\circ = 1 ; \quad \sin 90^\circ = 1.$$

#### Exercice 4

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse mesure 10 cm et l'un des angles aigus vaut  $\alpha = 30^\circ$ . Calculer la longueur du côté opposé à  $\alpha$ .

##### Corrigé

$$\sin \alpha = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}, \text{ donc opposé} = 10 \times \sin 30^\circ = 10 \times 0,5 = 5 \text{ cm.}$$

#### Exercice 5

Dans un triangle rectangle, le côté adjacent à  $\alpha = 40^\circ$  mesure 8 cm. Calculer la longueur de l'hypoténuse (résultat arrondi au dixième).

##### Corrigé

$$\cos \alpha = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}, \text{ donc hypoténuse} = \frac{8}{\cos 40^\circ} \approx \frac{8}{0,766} \approx 10,4 \text{ cm.}$$

#### Exercice 6

Dans un triangle rectangle, le côté opposé à  $\alpha$  mesure 7 cm et le côté adjacent mesure 24 cm. Calculer l'angle  $\alpha$  (résultat arrondi au degré).

**Corrigé**

$$\tan \alpha = \frac{7}{24} \approx 0,292, \text{ donc } \alpha = \tan^{-1}(0,292) \approx 16^\circ.$$

**Exercice 7**

Un triangle rectangle a une hypoténuse de 15 cm et un côté opposé à un angle  $\alpha$  de 9 cm. Calculer l'angle  $\alpha$  (résultat arrondi au degré).

**Corrigé**

$$\sin \alpha = \frac{9}{15} = 0,6, \text{ donc } \alpha = \sin^{-1}(0,6) \approx 37^\circ.$$

**Exercice 8**

Vérifier sur sa calculatrice qu'on est bien en mode degré, en calculant  $\sin 90^\circ$ . Quel résultat doit-on obtenir ? Et si le mode est radian, que donne le calcul ?

**Corrigé**

En mode degré :  $\sin 90^\circ = 1$  (exactement).

En mode radian :  $\sin 90 \approx 0,894$  (la calculatrice interprète 90 comme 90 radians). Si l'on obtient ce résultat, c'est qu'il faut basculer en mode degré.

————— *Pour aller plus loin* —————

**Exercice 9**

Un triangle rectangle a une hypoténuse de longueur  $c$ . Démontrer, à partir des définitions, que pour tout angle aigu  $\alpha$  de ce triangle on a  $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$ .

**Corrigé**

Soit  $a$  le côté opposé à  $\alpha$ ,  $b$  le côté adjacent. Alors  $\sin \alpha = a/c$  et  $\cos \alpha = b/c$ . Donc

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1,$$

par le théorème de Pythagore.

**Exercice 10**

Une échelle est appuyée contre un mur. Elle mesure 5 m et fait un angle de  $70^\circ$  avec le sol. Calculer la hauteur atteinte sur le mur (résultat arrondi au centimètre).

**Corrigé**

La hauteur est le côté opposé à l'angle  $70^\circ$  ; l'échelle est l'hypoténuse.

$$\text{Hauteur} = 5 \times \sin 70^\circ \approx 5 \times 0,9397 \approx 4,70 \text{ m} = 470 \text{ cm}.$$

**Exercice 11**

Un triangle rectangle a pour côtés 1,  $\sqrt{3}$ , 2. Identifier l'hypoténuse, puis calculer les trois angles (aidé du tableau des valeurs particulières).

**Corrigé**

L'hypoténuse est le côté le plus long : 2. On a un angle droit ; les deux autres angles  $\alpha$  et  $\beta$  vérifient  $\alpha + \beta = 90^\circ$ .

$\sin \alpha = \frac{1}{2}$  donc  $\alpha = 30^\circ$  ; et donc  $\beta = 60^\circ$ .

**Exercice 12**

Dans un triangle rectangle, on connaît  $\sin \alpha = 0,28$ . Calculer  $\alpha$  (au degré près), puis  $\cos \alpha$  et  $\tan \alpha$  (à  $10^{-2}$  près).

**Corrigé**

$\alpha = \sin^{-1}(0,28) \approx 16^\circ$ .

$\cos \alpha \approx \cos 16^\circ \approx 0,96$  ;  $\tan \alpha \approx \tan 16^\circ \approx 0,29$ .

**Activités d'application****Activité 1 • Puissance apparente d'une installation (Pythagore) ÉLECTROTECHNIQUE**

**Outil réinvesti** : théorème de Pythagore **Lien référentiel** : S2.1 — puissances active, réactive, apparente

Dans une installation en régime alternatif, les puissances active  $P$  (en kW), réactive  $Q$  (en kVAR) et apparente  $S$  (en kVA) sont reliées par

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

- Énoncer le théorème de Pythagore : il relie l'hypoténuse  $c$  aux deux côtés de l'angle droit  $a$  et  $b$  d'un triangle rectangle.
- Pour  $P = 3$  kW et  $Q = 4$  kVAR, calculer  $S$ .

**Corrigé**

1.  $c^2 = a^2 + b^2$ , donc  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

2.  $S = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$  kVA.

**Activité 2 • Facteur de puissance (cosinus)**

ÉLECTROTECHNIQUE

**Outil réinvesti** : cosinus, rapport, isoler une grandeur **Lien référentiel** : S2.1 — facteur de puissance

Le facteur de puissance d'une installation est défini par

$$\cos \varphi = \frac{P}{S},$$

où  $P$  est la puissance active et  $S$  la puissance apparente.

- Une installation a  $P = 8$  kW et  $S = 10$  kVA. Calculer  $\cos \varphi$ .
- Pour  $\cos \varphi = 0,95$  et  $P = 19$  kW, calculer  $S$ . (isoler  $S$ )

## Corrigé

1.  $\cos \varphi = \frac{8}{10} = 0,8.$
2.  $S = \frac{P}{\cos \varphi} = \frac{19}{0,95} = 20 \text{ kVA}.$

## Activité 3 • Force de Laplace sur un conducteur incliné (sinus) ÉLECTROTECHNIQUE

**Outil réinvesti :** sinus, application d'une formule **Lien référentiel :** S2.2 — forces sur les conducteurs

Un conducteur de longueur  $L$ , parcouru par un courant  $I$  et placé dans un champ magnétique d'intensité  $B$ , subit une force dont la valeur dépend de l'angle  $\theta$  entre le conducteur et le champ :

$$F = B \times I \times L \times \sin \theta .$$

On donne  $B = 1 \text{ T}$ ,  $I = 10 \text{ A}$  et  $L = 0,5 \text{ m}$ .

1. Calculer  $F$  pour  $\theta = 30^\circ$ .
2. Calculer  $F$  pour  $\theta = 90^\circ$ . Interpréter.

## Corrigé

1.  $F = 1 \times 10 \times 0,5 \times \sin 30^\circ = 5 \times 0,5 = 2,5 \text{ N}.$
2.  $F = 1 \times 10 \times 0,5 \times 1 = 5 \text{ N}$  : c'est la valeur maximale, atteinte quand le conducteur est perpendiculaire au champ magnétique.

## Activité 4 • Longueur de câble pour une descente inclinée ÉLECTROTECHNIQUE

**Outil réinvesti :** sinus, isoler une grandeur **Lien référentiel :** S3.2 — pose et cheminement des câbles

Un câble doit relier le haut d'un mur à un point au sol, en descendant en ligne droite avec une inclinaison  $\alpha = 30^\circ$  par rapport au sol. Le mur a une hauteur  $h = 10 \text{ m}$ .

Dans le triangle rectangle formé,  $h$  est le côté opposé à l'angle  $\alpha$  et la longueur  $L$  du câble en est l'hypoténuse.

1. Exprimer  $\sin \alpha$  en fonction de  $h$  et  $L$ .
2. En déduire  $L$ . (isoler  $L$ )

## Corrigé

1.  $\sin \alpha = \frac{h}{L}.$
2.  $L = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{10}{\sin 30^\circ} = \frac{10}{0,5} = 20 \text{ m}.$

## Activité 5 • Réfraction de la lumière PHYSIQUE APPLIQUÉE

**Outil réinvesti :** sinus, isoler une grandeur **Lien référentiel :** S15 — Optique (réfraction)

La loi de la réfraction (Snell–Descartes) est :  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ . On donne  $n_1 = 1$  (air),  $n_2 = 1,5$  (verre) et  $i_1 = 30^\circ$ .

1. Exprimer  $\sin i_2$ . (isoler  $\sin i_2$ )
2. Calculer  $\sin i_2$ , puis en déduire  $i_2$ .

## Corrigé

1.  $\sin i_2 = \frac{n_1 \sin i_1}{n_2}$ .
2.  $\sin i_2 = \frac{1 \times 0,5}{1,5} \approx 0,333$ , donc  $i_2 \approx 19,5^\circ$ .

## Activité 6 • Valeur instantanée d'une tension sinusoïdale

PHYSIQUE APPLIQUÉE

**Outil réinvesti :** sinus    **Lien référentiel :** S15 — Électricité (grandeurs alternatives)

Une tension alternative suit le modèle  $u = U_{\max} \sin \theta$ , où  $U_{\max}$  est la tension de crête. On donne  $U_{\max} = 325$  V.

1. Calculer  $u$  pour  $\theta = 30^\circ$ .
2. Calculer  $u$  pour  $\theta = 90^\circ$ . Que représente cette valeur ?

## Corrigé

1.  $u = 325 \times 0,5 = 162,5$  V.
2.  $u = 325 \times 1 = 325$  V : c'est la tension de crête.