Chapitre 5

Semaine 5 : Fonctions et lecture graphique

Cette semaine se compose de trois parties : (a) un rappel mathématique sur les notions à consolider, (b) des exercices classiques d'application directe (tronc commun aux quatre BTS), (c) des activités d'application en contexte Électrotech, qui réinvestissent ces notions dans des situations métier.

Rappel mathématique

Cette semaine consolide les outils pour décrire et interpréter une dépendance entre deux grandeurs : fonction linéaire, fonction affine, fonction carré, et lecture graphique. Ces outils permettent de modéliser un grand nombre de situations métier (loi d'Ohm, dilatation, débit, étalonnage de capteur).

§1. Notion de fonction

Définition – fonction

Une fonction f associe à chaque valeur x (la variable) une unique valeur $f(x)$ (l'image de x). La représentation graphique de f est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;\,f(x))$.

Exemple – Pour $f(x) = 2x + 1$, *on a* $f(0) = 1$, $f(3) = 7$, $f(-2) = -3$.

§2. Fonction linéaire

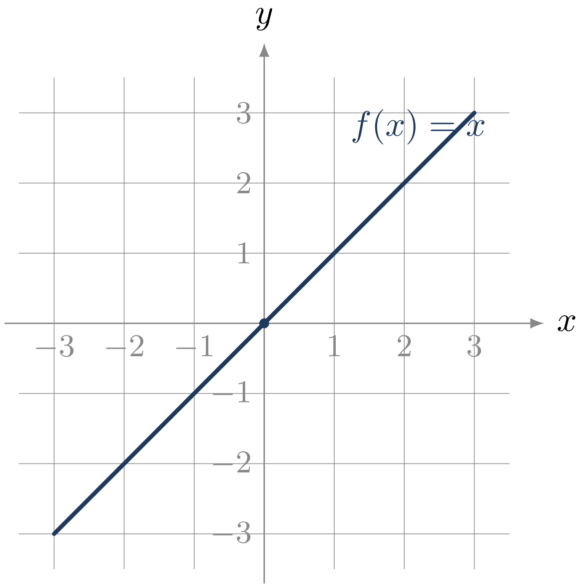
Définition – fonction linéaire

Une fonction linéaire est de la forme $f(x) = k\,x$, où k est un coefficient constant. Sa représentation graphique est une droite passant par l'origine.

Propriété – proportionnalité

Une fonction linéaire $f(x) = k\,x$ traduit une situation de **proportionnalité** entre x et $f(x)$, de coefficient k. Sur la droite, k est le *coefficient directeur* (la pente).

Exemple – Pour la loi d'Ohm $U = R\,I$, *la tension* U *est une fonction linéaire de l'intensité* I, *de pente* R *(la résistance).*



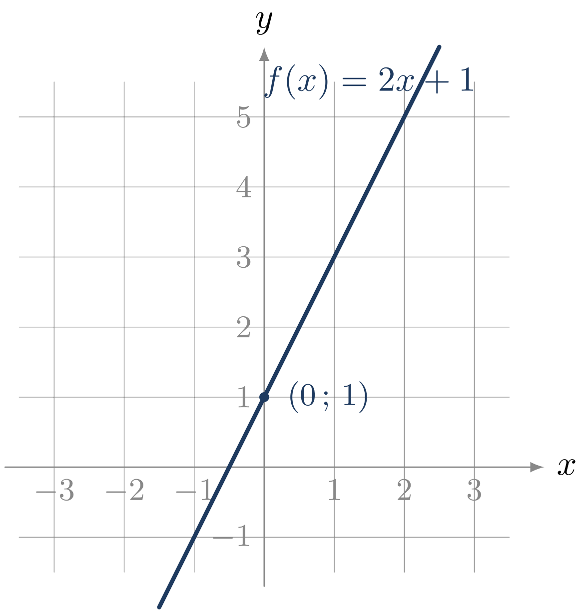
§3. Fonction affine

Définition – fonction affine

Une fonction affine est de la forme $f(x) = a\,x + b$, où a est le coefficient directeur (pente) et b l'ordonnée à l'origine. Sa représentation graphique est une droite, qui passe par le point $(0\,;\,b)$.

Si $b = 0$, la fonction est linéaire ; on retrouve le cas précédent.

Exemple – Pour $f(x) = 3x + 2$: $f(0) = 2$, $f(1) = 5$. *La droite passe par* $(0\,;\,2)$ *et a pour pente* 3.



Méthode – calculer la pente entre deux points

Pour une droite passant par les points $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ (avec $x_A \neq x_B$), la pente vaut

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\,.$$

§4. Fonction carré

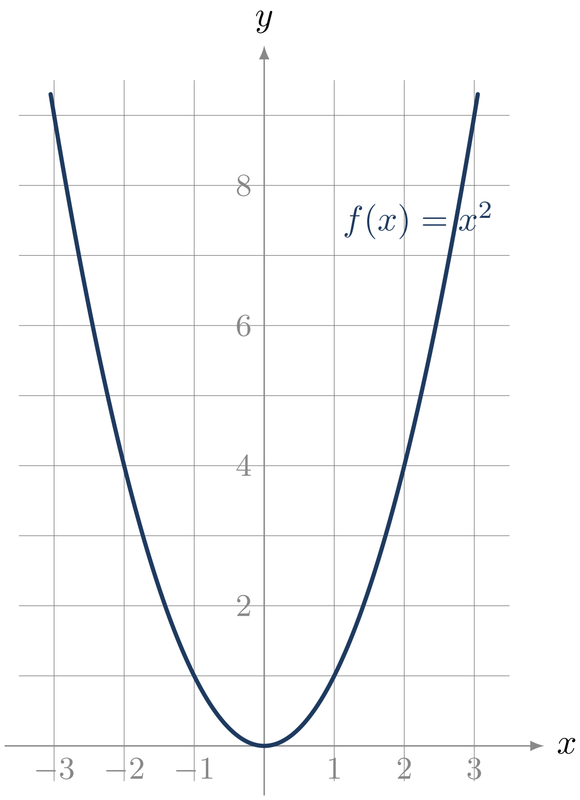
Définition – fonction carré

La fonction carré est définie par $f(x) = x^2$. Pour $a \neq 0$, on appelle parfois ainsi toute fonction de la forme $f(x) = a\,x^2$.

Propriété – effet du carré

Si l'on multiplie la variable par 2, l'image est multipliée par $2^2 = 4$. Plus généralement, multiplier par k multiplie l'image par k^2.

Exemple – Pour $f(x) = x^2$: $f(2) = 4$, $f(4) = 16$ (quatre fois plus pour une variable doublée). C'est la signature visuelle d'une dépendance en carré.



Cas métier. La puissance dissipée par effet Joule $P = R\,I^2$ est une fonction carré de l'intensité : doubler I quadruple la puissance.

§5. Lecture graphique

Méthode – lire une courbe

Pour exploiter une représentation graphique :

- **Image d'une valeur** : pour lire $f(a)$, on repère a sur l'axe des abscisses, on monte verticalement jusqu'à la courbe, puis horizontalement jusqu'à l'axe des ordonnées.
- **Antécédent** : pour trouver les valeurs x telles que $f(x) = c$, on repère c sur l'axe des ordonnées, on va horizontalement jusqu'à la courbe, puis verticalement jusqu'à l'axe des abscisses.
- **Point d'intersection** : entre deux courbes, le point d'intersection donne une valeur de x pour laquelle les deux fonctions prennent la même valeur.

Exercices classiques

Les huit premiers sont à traiter en priorité ; les quatre suivants, signalés *Pour aller plus loin*, sont à traiter en travail personnel ou si le temps le permet.

Exercice 1

Soit la fonction $f(x) = 2x + 5$. Calculer $f(0)$, $f(3)$, $f(-2)$.

Corrigé

$f(0) = 5$; $f(3) = 6 + 5 = 11$; $f(-2) = -4 + 5 = 1$.

Exercice 2

Pour la fonction linéaire $f(x) = 4x$, compléter le tableau et vérifier qu'il s'agit bien d'une situation de proportionnalité.

x	0	1	2	3
$f(x)$				

Corrigé

$f(0) = 0$, $f(1) = 4$, $f(2) = 8$, $f(3) = 12$. Le rapport $f(x)/x$ vaut 4 pour toutes les valeurs non nulles : c'est bien une situation de proportionnalité de coefficient 4.

Exercice 3

Soit la fonction affine $f(x) = 3x - 1$. Calculer $f(0)$, $f(2)$ et $f(4)$. Vérifier ensuite la pente entre les points $(2\,;\,f(2))$ et $(4\,;\,f(4))$.

Corrigé

$f(0) = -1$; $f(2) = 5$; $f(4) = 11$.

Pente $= \dfrac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \dfrac{11 - 5}{2} = 3$. C'est bien le coefficient directeur de la fonction.

Exercice 4

Une droite passe par les points $A(1\,;\,2)$ et $B(5\,;\,10)$. Calculer son coefficient directeur, puis écrire l'équation de la droite $y = a\,x + b$.

Corrigé

$a = \dfrac{10-2}{5-1} = \dfrac{8}{4} = 2.$
On a $y = 2x + b$; en utilisant A : $2 = 2 \times 1 + b$, donc $b = 0$.
Équation : $y = 2x$.

Exercice 5

Soit la fonction carré $f(x) = x^2$. Calculer $f(2)$, $f(4)$, $f(8)$. Si l'on double la variable, par quel facteur l'image est-elle multipliée ?

Corrigé

$f(2) = 4$, $f(4) = 16$, $f(8) = 64$.
Doubler la variable multiplie l'image par 4 (signature du carré).

Exercice 6

Soit la fonction $f(x) = 5\,x^2$. Compléter le tableau de valeurs.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$					

Corrigé

$f(0) = 0$, $f(1) = 5$, $f(2) = 20$, $f(3) = 45$, $f(4) = 80$.

Exercice 7

Le tableau de valeurs ci-dessous est-il celui d'une fonction linéaire, affine, ou carré ?

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	5	7	9	11

Corrigé

Les valeurs augmentent de 2 à chaque fois (pas constant) : c'est une fonction affine. Pente $a = 2$, et $f(0) = 3$, donc $f(x) = 2x + 3$. Ce n'est pas une fonction linéaire car $f(0) \neq 0$.

Exercice 8

Sur un graphique, la droite représentative d'une fonction f passe par $(0\,;4)$ et $(2\,;0)$. En déduire l'expression de f.

Corrigé

Pente : $a = \dfrac{0-4}{2-0} = -2.$
Ordonnée à l'origine : $b = 4$.
Donc $f(x) = -2x + 4$.

Pour aller plus loin

Exercice 9

Une fonction f vérifie $f(x) = a\,x + b$ avec $f(2) = 7$ et $f(5) = 16$. Déterminer a et b.

Corrigé

$a = \dfrac{16-7}{5-2} = 3$.
$7 = 3 \times 2 + b$, donc $b = 1$.
Donc $f(x) = 3x + 1$.

Exercice 10

Deux droites ont pour équations $y = 2x + 1$ et $y = -x + 4$. Calculer le point d'intersection (résoudre $2x + 1 = -x + 4$).

Corrigé

$2x + 1 = -x + 4 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$.
$y = 2 \times 1 + 1 = 3$ (ou $y = -1 + 4 = 3$).
Point d'intersection : $(1\,;\,3)$.

Exercice 11

Soit $f(x) = x^2$. Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) = 49$?

Corrigé

$x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$ ou $x = -7$ (deux antécédents possibles).

Exercice 12

Lecture graphique. Sur un graphique non fourni ici, on lit que la droite passe par $(1\,;\,3)$ et $(4\,;\,9)$, et la parabole d'équation $y = x^2$ passe (notamment) par $(3\,;\,9)$. La droite et la parabole se coupent en deux points. En partant des équations, calculer les abscisses de ces deux points d'intersection.

Corrigé

Pente de la droite : $a = \dfrac{9-3}{4-1} = 2$. Avec $3 = 2 \times 1 + b$, on a $b = 1$, donc $y = 2x + 1$.
Intersection avec $y = x^2$: $x^2 = 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$.
$\Delta = 4 + 4 = 8$, donc $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$, soit $x \approx 2{,}41$ ou $x \approx -0{,}41$.

Activités d'application

Activité 1 • Décharge d'une batterie (fonction affine) ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *fonction affine, isoler une grandeur* ***Lien référentiel :*** *S2.2 — accumulateurs et batteries*

La tension aux bornes d'une batterie qui se décharge à courant constant suit une loi affine : $U(t) = U_0 - k\,t$, où U_0 est la tension initiale et k la vitesse de chute (en V/min). On donne $U_0 = 12$ V et $k = 0{,}1$ V/min.

1. Calculer U au bout de $t = 20$ min.

2. À quel instant t la tension atteint-elle $U = 9$ V ? (isoler t)

Corrigé

1. $U = 12 - 0{,}1 \times 20 = 12 - 2 = 10$ V.
2. $9 = 12 - 0{,}1\,t \Rightarrow 0{,}1\,t = 3 \Rightarrow t = 30$ min.

Activité 2 • Caractéristique d'un conducteur ohmique (fonction linéaire) ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *proportionnalité, lecture de tableau, pente* ***Lien référentiel :*** *S2.1 — loi d'Ohm, caractéristique $U(I)$*

Pour différents courants I, on mesure la tension U aux bornes d'une résistance :

I (A)	0	1	2	3
U (V)	0	5	10	15

1. Calculer le rapport U/I pour chaque mesure non nulle. Que remarque-t-on ?
2. En déduire la valeur de la résistance R (la pente de la droite $U = R\,I$).

Corrigé

1. $\frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} = 5$: le rapport est constant.
2. $R = 5\ \Omega$.

Activité 3 • Effet Joule en fonction de l'intensité (fonction carré) ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *fonction carré, tableau de valeurs* ***Lien référentiel :*** *S2.1 — pertes par effet Joule*

La puissance dissipée par effet Joule dans une résistance $R = 10\ \Omega$ est $P = R\,I^2 = 10\,I^2$.

1. Compléter le tableau de P pour $I = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ A.
2. Si l'on double l'intensité, par combien la puissance est-elle multipliée ? Justifier.

Corrigé

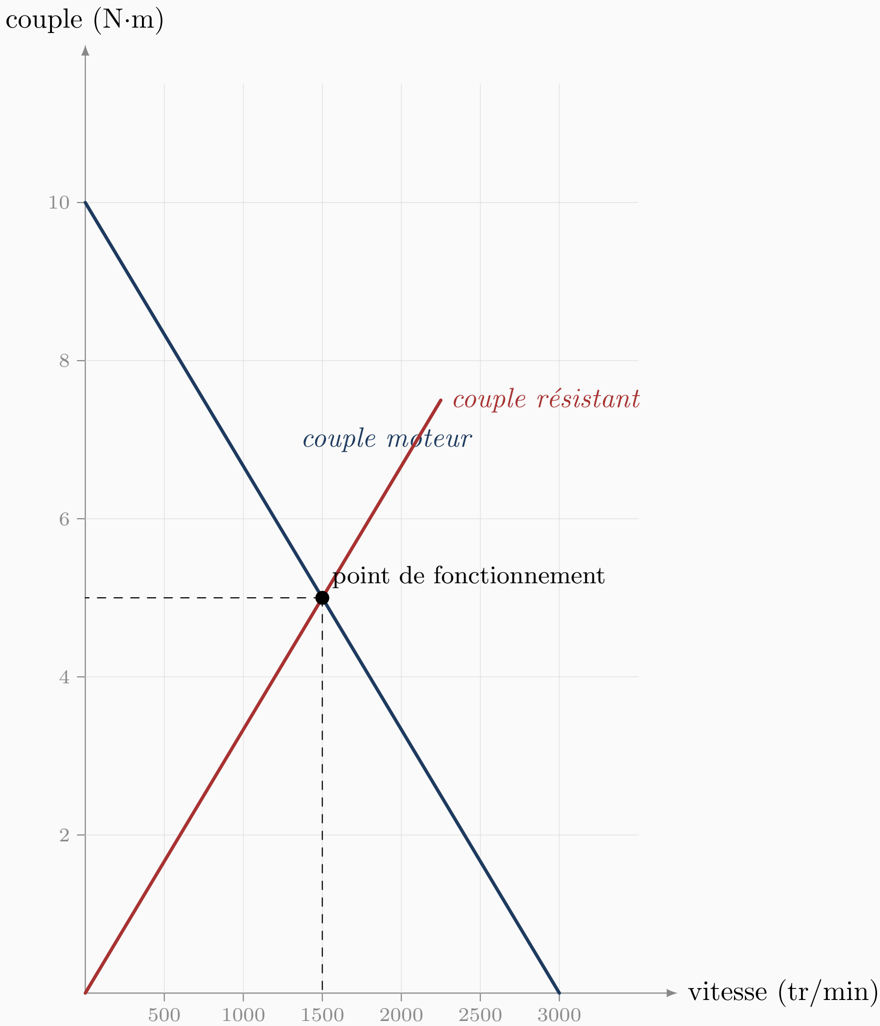
I (A)	0	1	2	3	4
P (W)	0	10	40	90	160

Doubler I multiplie P par $2^2 = 4$ (par exemple de 10 à 40 entre $I = 1$ et $I = 2$) : c'est la signature de la fonction carré.

Activité 4 • Lecture d'une caractéristique de moteur ÉLECTROTECHNIQUE

Outil réinvesti : *lecture graphique, point de fonctionnement* ***Lien référentiel :*** *S2.2 — moteurs électriques, caractéristiques*

La courbe ci-dessous représente la caractéristique couple–vitesse d'un moteur électrique. La droite décroissante donne le couple disponible du moteur en fonction de sa vitesse de rotation ; la droite croissante donne le couple résistant exigé par la charge entraînée. Le *point de fonctionnement* est leur intersection.



1. Lire les coordonnées du point de fonctionnement (vitesse en tr/min, couple en N·m).
2. Quel est le couple disponible quand le moteur est à l'arrêt (vitesse nulle) ? On l'appelle le *couple de démarrage*.
3. Pour quelle vitesse le couple disponible devient-il nul ? On l'appelle la *vitesse à vide*.

Corrigé

1. Point de fonctionnement : vitesse $\approx 1\,500$ tr/min, couple ≈ 5 N · m.
2. À vitesse nulle, le couple disponible vaut 10 N · m : c'est le couple de démarrage.
3. Le couple disponible devient nul vers $3\,000$ tr/min : c'est la vitesse à vide.

Activité 5 • Étalonnage d'un capteur (fonction linéaire) PHYSIQUE APPLIQUÉE

***Outil réinvesti :** proportionnalité, lecture graphique, pente* ***Lien référentiel :** S15 — mesure et instrumentation*

On étalonne un capteur de température en relevant sa tension de sortie U pour différentes températures T :

T (°C)	0	20	40	60	80
U (mV)	0	100	200	300	400

1. Calculer le rapport U/T pour les mesures non nulles. Que constate-t-on ?

2. En déduire la sensibilité du capteur (en mV par °C), puis prédire la tension obtenue à $T = 100$ °C.

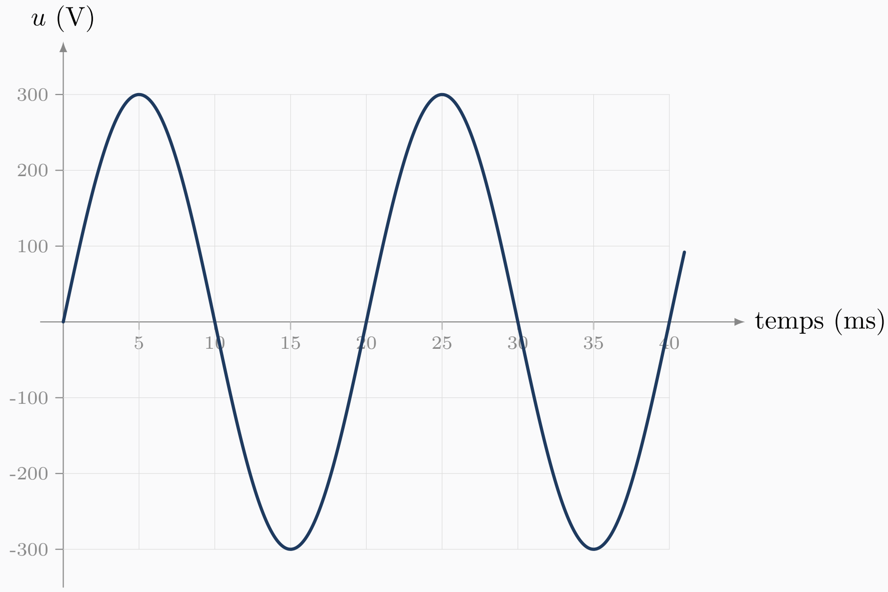
Corrigé

1. $\dfrac{100}{20} = \dfrac{200}{40} = \dfrac{300}{60} = \dfrac{400}{80} = 5$: le rapport est constant.
2. Sensibilité $= 5$ mV/°C. Pour $T = 100$ °C : $U = 5 \times 100 = 500$ mV.

Activité 6 • Lecture d'un oscillogramme (signal sinusoïdal) — PHYSIQUE APPLIQUÉE

***Outil réinvesti :** lecture graphique, période et fréquence* ***Lien référentiel :** S15 — Électricité (grandeurs alternatives)*

L'oscillogramme ci-dessous représente une tension alternative en fonction du temps.



1. Lire l'amplitude (valeur de crête) de la tension.
2. Lire la durée d'un cycle complet (la période T), puis calculer la fréquence f (rappel : $f = 1/T$).

Corrigé

1. Amplitude $= 300$ V.
2. $T = 20$ ms $= 0{,}020$ s, donc $f = \dfrac{1}{0{,}020} = 50$ Hz.